А. Г. Мордкович

Алгебра

8

Методическое пособие для учителя

Издательство Мнемозина

А. Г. Мордкович

Алгебра

8 класс

Методическое пособие для учителя

Издательство Мнемозина

Москва 2010

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
М79

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра. 8 класс : методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович. — М. : Мнемозина, 2010. — 77 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01396-9

В пособии представлены концепция и программа курса алгебры в 7—9 классах, примерное планирование учебного материала в 8 классе, методические рекомендации по работе с учебником А. Г. Мордковича «Алгебра. 8 класс», решение наиболее трудных задач из одноименного задачника.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-346-01396-9

Предисловие

Начиная с 2007 года издательство «Мнемозина» публикует переработанный вариант учебного комплекта для изучения курса алгебры в 8 классе:

А. Г. Мордкович. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник;

А. Г. Мордкович и др. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник.

Этот комплект отличается от издававшегося в 1998—2006 годах: во-первых, изменился порядок изучения глав и параграфов; во-вторых, сделаны некоторые редакционные и содержательные изменения внутри отдельных параграфов учебника; в-третьих, существенно переработан задачник.

Цель данного пособия — оказать методическую помощь учителям математики, использующим указанный переработанный комплект в своей педагогической деятельности.

В главе 1 пособия излагается общая концепция курса алгебры для общеобразовательной школы, реализованная в единой линии наших учебников и задачников по алгебре для 7—11 классов, приводится содержание авторской программы курса алгебры 7—9, а также примерное планирование учебного материала для 8 класса. Все это (кроме планирования) имеется и в методическом пособии для учителя «Алгебра—7». Но поскольку нередки случаи, когда учитель начинает работать по нашим пособиям не с 7, а с 8 класса, автор счел необходимым продублировать в настоящем пособии и общую концепцию курса (с необходимыми коррективами), и программу курса алгебры основной школы.

Глава 2 содержит методические рекомендации по всем темам (главам) учебника «Алгебра—8». Содержание этих рекомендаций внутри тем не унифицировано. Оно зависит, естественно, от важности и трудности темы, степени ее методической новизны. Для традиционных тем мы ограничиваемся отдельными методическими замечаниями и советами. В других случаях разговор идет на более серьезном методическом и психолого-педагогическом уровнях.

В главе 3 содержится решение ряда упражнений повышенной сложности из задачника «Алгебра—8» (тех упражнений, которые помечены в задачнике значком •).

Глава 1

КОНЦЕПЦИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ ДЛЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Под руководством автора настоящей книги созданы учебники и задачники для изучения в школе курса алгебры в 7—9 классах и курса алгебры и начал математического анализа в 10—11 классах. Они прошли соответствующую экспертизу в РАН и РАО, включены в Федеральный перечень учебников и внедряются в школы России. Это поколение учебных пособий базируется на новой концепции, усиливающей развивающий и гуманитарный потенциал школьного курса алгебры. Исходные положения концепции можно сформулировать в виде двух лозунгов.

1. *Математика в школе — не наука и даже не основы науки, а учебный предмет.*

2. *Математика в школе — гуманитарный учебный предмет.*

Сделаем **пояснения к первому лозунгу.** Не так давно считалось, что главное в школьном обучении математике — повысить так называемую научность, что в конечном итоге свелось к перекосу в сторону формализма и схоластики, к бессмысленному заучиванию формул. Когда педагогическая общественность начала это осознавать, стало крепнуть (хотя и не без борьбы) представление о том, что школьная математика не наука, а учебный предмет со всеми вытекающими отсюда последствиями. В учебном предмете не обязательно соблюдать законы математики как науки (например, такие: все начинается с аксиом, нельзя начинать изучение теории без строгого определения основных понятий, все утверждения надо доказывать и т. д.), зачастую более важны законы педагогики и особенно психологии, постулаты теории развивающего обучения.

В этой связи поговорим о самом трудном в преподавании — об определениях (*как* и *когда* должен вводить учитель то или иное сложное математическое понятие) и о выборе уровня строгости изложения в школьном курсе математики. Начнем с определений.

Если основная задача учителя — обучение, то он имеет право давать формальное определение любого понятия тогда, когда считает нужным. Если основная задача учителя — развитие, то следует продумать выбор места и времени *(стратегию)* и этапы постепенного подхода к формальному определению на основе предварительного изучения понятия на более простых уровнях *(тактику)*. Таких уровней в математике можно назвать три: *наглядно-интуитивный*, когда новое понятие вводится с опорой на интуитивные или образные представления учащихся; *рабочий (описательный)*, когда от учащегося требуется уметь отвечать не на вопрос «Что такое...», а на вопрос «Как ты понимаешь, что такое...»; *формальный*.

Стратегия введения определений сложных математических понятий в наших учебниках базируется на положении о том, что выходить на формальный уровень следует при выполнении двух условий:

1) если у учащихся накопился достаточный **опыт** для адекватного восприятия вводимого понятия, причем опыт по двум направлениям: *вербальный опыт* (опыт полноценного понимания всех слов, содержащихся в определении) и *генетический опыт* (опыт использования понятия на наглядно-интуитивном и рабочем уровнях);

2) если у учащихся появилась **потребность** в формальном определении понятия.

Что касается генетического опыта, то следует почаще обращаться к истории математики. То или иное понятие математики практически всегда проходило в своем становлении три указанные выше стадии (наглядное представление, рабочий уровень восприятия, формальное определение), причем переход с уровня на уровень зачастую был весьма болезненным и длительным по времени. Не учитывать этого нельзя, ибо то, что с муками рождалось в истории математики, будет мучительным и для сегодняшних детей. Надо дать им время пережить это, не спеша переходить с уровня на уровень.

Рассмотрим в качестве примера формирование понятия равносильности уравнений в нашем курсе алгебры. В 7 классе о равносильности уравнений и о равносильных преобразованиях уравнения речь вообще не идет, хотя, разумеется, решаются уравнения (линейные и даже некоторые квадратные) и системы линейных уравнений. Почему? Да потому, что в рассматриваемом блоке уравнений неравносильных преобразований не бывает, следовательно, нет никакой потребности во введении термина, да и опыт приобретать не на чем. В начале 8 класса при изучении алгебраических дробей даются первые представления о рациональных уравнениях и, в частности, о том, что при их решении могут появиться посторонние корни, а потому обязательна проверка. Но термин «равносильность» еще не вводится (мало опыта).

Во втором полугодии 8 класса решаются рациональные уравнения и простейшие иррациональные уравнения. Обнаруживается, что посторонние корни могут появиться не только за счет освобождения от знаменателей, но и за счет возведения обеих частей уравнения в квадрат. Вот теперь ученики накопили необходимый опыт и ощутили потребность в его осмыслении; значит, именно здесь настает благоприятный момент для введения таких понятий, как равносильность уравнений, равносильные и неравносильные их преобразования, посторонние корни и проверка корней.

Та же тактика используется и в учебнике для 9 класса. Сначала научимся решать системы уравнений, а затем выйдем на уровень теоретических осмыслений и обратим внимание учащихся на то, что метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных абсолютно корректны с точки зрения равносильности. Иными словами, применяя эти методы, мы заменяем одну систему уравнений другой, более простой, но равносильной первоначальной системе.

Подчеркнем, что новый математический термин и новое обозначение должны появляться мотивированно, тогда, когда в них возникает необходимость (в первую очередь в связи с появлением новой математической модели). Немотивированное (или, как теперь модно говорить, несанкционированное) введение нового термина провоцирует запоминание (компонент обучения) без понимания (и, следовательно, без развития).

Несколько слов о выборе уровня строгости в учебном предмете. В отличие от науки в учебном предмете мы не обязаны все доказывать. Более того, в ряде случаев правдоподобные рассуждения или рассуждения, опирающиеся на графические модели, на интуицию, имеют для школьников более весомую развивающую и гуманитарную ценность, чем формальные доказательства. В нашем курсе все, что входит в программу, что имеет воспитательную ценность и доступно учащимся, доказывается. Если формальные доказательства малопоучительны и схоластичны, их заменяют правдоподобными рассуждениями. Наше кредо: с одной стороны, *меньше схоластики, меньше формализма, меньше «жестких моделей», меньше опоры на левое полушарие мозга*; с другой стороны, *больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше «мягких моделей», больше опоры на правое полушарие мозга*. Преподавать в постоянном режиме жесткого моделирования — легко, использовать в преподавании режим мягкого моделирования — трудно; первый режим — удел ремесленников от педагогики, второй режим — удел творцов.

Выше мы не раз использовали термины «развитие», «развивающее обучение». Остановимся на этом подробнее.

В наших учебных пособиях мы в той или иной степени старались реализовать *пять принципов развивающего обучения Л. В. Занкова*. То, что теория занимает приоритетное положение *(первый принцип)*, обсуждению не подлежит — это вообще характерная особенность учебной дисциплины под названием «математика». Наши учебные пособия насыщены информацией, так что изучение материала должно проходить в быстром темпе *(второй принцип)*. Основное внимание при изложении материала уделяется трудным местам курса; трудности не отметаются, а преодолеваются совместной работой с учащимися при помощи отыскания адекватных методических средств *(третий принцип)*.

Более подробно остановимся на четвертом и пятом принципах развивающего обучения Л. В. Занкова.

Наша трактовка *четвертого принципа* такова: ученик не развивается по-настоящему, если он *не осознает своего развития*, не осознает, что изученный на уроке материал имеет гуманитарную (а не только информационную) ценность *лично для него*. В нашем курсе это достигается за счет целесообразно организованного *проблемного обучения*.

Есть три подхода к обучению математике, в той или иной степени ассоциирующихся с проблемным обучением: метод обучения с помощью задач, метод обучения посредством создания проблемных ситуаций и собственно проблемное обучение. Метод обучения через задачи заключается в следующем: в начале урока учитель предлагает ученикам задачу, решить которую они пока не в состоянии. Он кое-что объясняет, вводит новые элементы теории, затем возвращается к исходной задаче и доводит ее до конца. В принципе это вполне пригодный метод обучения, но у него есть один крупный недостаток — он не является личностно-ориентированным. Задача, которая разбирается на уроке, нужна *не ученику, а учителю*. Учитель навязывает ее учащимся, поскольку это сделает процесс объяснения нового материала более комфортным *для учителя*. Примерно так же обстоит дело и с методом создания проблемных ситуаций. В проблемную ситуацию учащегося загоняет учитель и сам его из проблемной ситуации выводит, причем на том же уроке. При использовании указанных двух методов учащиеся, как правило, пассивны.

При правильном подходе к проблемному обучению ситуация иная. Во-первых, с проблемой должен непосредственно столкнуться сам учащийся. Решая задачу или проводя какие-то рассуждения, он должен лично убедиться в том, что что-то ему не по силам, поскольку он, видимо, чего-то не знает (в нашем курсе это, как правило, связано с выходом на новую математическую модель). Во-вторых, решение проблемы должно быть отсрочено по времени, проблема должна «отлежаться». Только при этих условиях, добравшись до решения проблемы, учащийся поймет, что он продвинулся в своем развитии, и получит определенные положительные эмоции.

Приведем пример. В курсе алгебры 7 класса, говоря о разложении многочленов на множители, мы опережающим образом вводим понятие квадратного уравнения (тема 8 класса) и показываем учащимся, как можно решать квадратные уравнения методом разложения на множители. Учащимся этот метод обычно нравится, но они сразу же сталкиваются с неприятностью: далеко не всегда квадратный трехчлен удается разложить на множители, а если это сделать можно в принципе, то далеко не всегда удается найти подходы к правильной перегруппировке слагаемых. Далее, изучив линейную функцию и функцию $y = x^2$, мы предлагаем учащимся решать квадратные уравнения графически. Семиклассники это делают с удовольствием (для них эти сюжеты носят игровой характер), но опять-таки сталкиваются с проблемой: оказывается, есть уравнения, легко решаемые графически, например $x^2 = x + 2$, но есть и уравнения, графически не решаемые вовсе (речь идет об отыскании точных значений корней), например $x^2 = x + 3$. Изучив в 8 классе квадратичную функцию, учащиеся знакомятся с самыми разнообразными способами графического решения квадратных уравнений и лишний раз убеждаются в том, что графические методы красивы и приятны, но ненадежны. Наконец, во втором полугодии 8 класса учащиеся узнают о готовой формуле корней квадратного уравнения и понимают, что их сомнениям, их неуверенности пришел конец, проблема решена. Бывали случаи, когда школьники, изучающие алгебру по нашим учебникам, после урока, на котором их познакомили с формулой корней квадратных уравнений, подходили к учителю на перемене со словами, смысл которых сводился к следующему: «Вы нам морочили голову, мы мучились с квадратными уравнениями, изобретали разные способы их решения, а оказывается все так просто». Это значит, что учащиеся осознали ценность полученного результата *лично для себя*.

В заключение поговорим о *пятом принципе* Л. В. Занкова: о развитии всех учащихся, иными словами — о дифференцированном подходе к обучению.

Решили ли мы в наших учебных пособиях проблему дифференцированного обучения? Конечно нет, утверждать обратное было бы слишком самонадеянно. Но подходы к решению этой проблемы мы наметили. Особенно ярко это видно в наших задачниках. Упражнения к каждому параграфу представлены на четырех уровнях сложности. Два уровня — базовые (строго в рамках стандарта): упражнения помещены *до черты* и либо не имеют около номера никакого опознавательного знака (это упражнения устные или полуустные), либо имеют рядом с номером специальный значок ○ (это упражнения средней трудности, к ним в конце задачника даны ответы). Два уровня — выше базового: эти упражнения приведены в задачнике *после черты*, к ним также даны ответы, причем трудные задачи помечены специальным значком ● (их решения приведены в настоящем методическом пособии). Далее следует подчеркнуть, что в каждом параграфе упражнения идут блоками с тщательно выдерживаемой линией нарастания трудности: от номера к номеру добавляется только один новый дидактический компонент, который учитель легко обнаружит и поймет, надо ли ему в своем конкретном классе идти с предлагаемой авторами скоростью, не стоит ли кое-какие номера пропустить. Это одна из причин, почему наши задачники по объему больше других и почему их пришлось выпускать отдельными книгами. Вторая причина — стремление авторов сделать избыточный и самодостаточный задачник, при использовании которого не было бы необходимости прибегать к помощи других задачников.

Сделаем **пояснения ко второму лозунгу**. Математика — гуманитарный (общекультурный) предмет, который позволяет субъекту правильно ориентироваться в окружающей действительности и «ум в порядок приводит». Математика — наука о математических моделях. Модели описываются в математике специфическим языком (термины, обозначения, символы, графики, графы, алгоритмы и т. д.). Значит, надо изучать математический язык, чтобы мы могли работать с любыми математическими моделями. Но учебный предмет, ориентированный на изучение какого-либо языка, обычно считают предметом гуманитарным. Особенно важно при этом подчеркнуть, что основное назначение математического языка — способствовать организации деятельности (тогда как основное назначение обыденного языка — служить средством общения), а это в наше время очень важно для культурного человека. Поэтому в нашем курсе *математический язык* и *математическая модель* — ключевые слова в постепенном развертывании курса, его идейный стержень. При наличии идейного стержня математика предстает перед учащимся не как набор разрозненных фактов, которые учитель излагает только потому, что они есть в программе, а как цельная развивающая дисциплина *общекультурного характера*.

В наше время владение хотя бы азами математического языка — непременный атрибут культурного человека. Поэтому, на наш взгляд, сегодня начинать заниматься изучением математического языка и математических моделей в школе надо как можно раньше, если не в начальной школе, то уж во всяком случае в курсе математики 5—6 классов (это в определенной степени сделано в ориентированных на нашу концепцию учебниках И. И. Зубаревой и А. Г. Мордковича «Математика—5» и «Математика—6», издательство «Мнемозина»).

Гуманитарный потенциал школьного курса алгебры мы видим, во-первых, в том, что владение математическим языком и математическим моделированием позволит учащемуся лучше ориентироваться в природе и обществе;

во-вторых, в том, что математика по своей внутренней природе имеет богатые возможности для воспитания мышления и характера учащихся;

в-третьих, в реализации в процессе преподавания идей развивающего и проблемного обучения;

в-четвертых, в том, что уроки математики (при правильной постановке) способствуют развитию речи обучаемого не в меньшей степени, чем уроки русского языка и литературы.

Заметим, что желание способствовать реализации последнего тезиса и привело к тому, что наши учебники написаны весьма подробно, обстоятельно и где-то даже избыточно многословно, вопреки сложившейся в последние годы традиции излагать материал в школьных учебниках математики в телеграфно-инструктивной, информационно-авторитарной манере. Но есть и еще одна серьезная причина выбора нами мягкого стиля подачи материала в учебнике как в отдельной книге. Дело в том, что сегодня школа, повторим еще раз, должна не только обеспечить учащегося необходимыми знаниями, но и *научить его самостоятельному добыванию информации* (без чего прожить в условиях рынка просто невозможно). А для этого надо приучить ребенка к самостоятельному чтению учебной книги. Но сухо написанный учебник ребенок читать не будет.

В нашем построении школьного курса алгебры реализованы следующие принципы.

1. *Принцип крупных блоков.* Он заключается в том, что если имеется объективная возможность изучить тот или иной раздел курса алгебры в том или ином классе компактно, без перебивок, без лоскутности, то этой возможностью следует воспользоваться. Так, в курсе 7 класса мы компактно излагаем раздел, связанный с преобразованием целых выражений, начиная от степеней с на-

туральными показателями и кончая разложением многочленов на множители; позднее, в 10 классе, компактно строится раздел «Тригонометрия» и т. д.

2. *Отсутствие «тупиковых» тем.* Ни в одном классе ни одна тема не должна быть «тупиковой», т. е. не связанной ни с предшествующим, ни с последующим материалом. К сожалению, сегодня в школе этот принцип не всегда выдерживается: например, «тупиковой» является тема, связанная с приближенными вычислениями в 7 классе, тема «Прогрессии» в 9 классе и т. д. В нашем курсе этого нет: приближенные вычисления органично вписаны в тему «Действительные числа» в 8 классе, а «Прогрессии» — в единую функционально-графическую линию курса алгебры.

3. *Принцип детерминированности, логической завершенности построения курса.* Образно выражаясь, программа курса должна быть «некоммутативна», т. е. выстроена так, чтобы темы были, как правило, непереставимы и чтобы порядок ходов был понятен учителю.

4. *Принцип завершенности в пределах учебного года.* Опять-таки образно выражаясь, можно сказать так: школьный курс алгебры — «пятисерийный (по числу лет изучения курса) роман с продолжением»; в каждом конкретном классе изучается определенная серия, имеющая свою внутреннюю интригу и более-менее законченное содержание, причем это содержание может быть кратко охарактеризовано одной-двумя ключевыми фразами. Реализация этого принципа способствует тому, что учащиеся начинают лично осознавать структуру курса.

5. *Приоритетность функционально-графической линии.* Математические модели напрямую связаны с функциями, поэтому функции становятся ведущей идеей курса алгебры практически во всех разделах (за исключением, может быть, раздела, посвященного преобразованиям целых выражений, где закладывается фундамент математического языка, без которого, естественно, никакие математические модели изучать нельзя). При этом надо подчеркнуть, что реализуемая в нашей программе концепция изучения функций существенно отличается от традиционной. Методология новой концепции заключается в следующем: каждый год обучения ориентирован на конкретную модель реальной действительности. Раскроем это положение.

Основная тема 7 класса — линейная функция, что с точки зрения моделирования реальных процессов соответствует равномерным процессам. Основная тема 8 класса — квадратичная функция, моделирующая равноускоренные процессы. Основная тема 10 класса — тригонометрические функции, они моделируют периодические процессы. В 11 классе появляется показательная функция, моделирующая процессы органического роста. Таким образом, тезис «математика изучает математические модели» наполняется конкретным содержанием: четыре типа основных моделей реальной действительности, изучаемых в школе (на уроках математики, физики, химии и т. п.), четко разводятся по годам изучения школьного курса алгебры.

Подчеркнем еще раз, что из основных содержательно-методических линий школьного курса алгебры в качестве приоритетной выбрана **функционально-графическая линия.** Это выражается прежде всего в том, что, какой бы класс функций, уравнений, выражений не изучался, построение материала практически всегда осуществляется по жесткой схеме:

функция — уравнения — преобразования.

Приоритетность функционально-графической линии имеет ярко выраженный психологический подтекст. Известно, что наш мозг состоит из двух полушарий: левое отвечает за логическую составляющую мышления, правое — за интуицию и пространственное воображение. К сожалению, алгебра в школе преимущественно левополушарна из-за засилия в ней формульной части, тогда как дети к началу изучения алгебры в большинстве своем правополушарны. Налицо противоречие между построением курса и возможностями детей. Приоритет функционально-графической линии сглаживает это противоречие, поскольку активно опирается на возможности правого полушария и создает нормальную среду для гармоничной работы обоих полушарий мозга.

Уместно вспомнить высказывание французского психолога J. Solgnier: «Обучая левое полушарие, вы обучаете только левое полушарие. Обучая правое полушарие, вы обучаете весь мозг».

Раскроем **методические особенности концепции изучения функций,** заложенные в наших учебниках.

1) *Отказ от формулировки определения функции при первом появлении этого понятия.*

Поначалу, пока изучаются простейшие функции (линейная, обратная пропорциональность, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$, квадратичная и пр. — в нашей программе это материал 7—8 классов), следует отказаться от формального определения функции и ограничиться описанием, не требующим заучивания. Ничего страшного в этом нет, о чем свидетельствует и история математики. Многие математические теории строились, развивались и обогащались все новыми и новыми фактами и приложениями, несмотря на отсутствие определения основного понятия теории. Так было в теории пределов (до *О. Коши*), так было в теории действительного числа. Действительными числами оперировали многие века, не имея определения, и лишь в конце XIX в. появилось сразу несколько вариантов определения действительного числа *(Р. Дедекинд, К. Вейерштрасс, Г. Кантор)*. Можно строить теорию, даже достаточно строгую, и при отсутствии строгого определения исходного понятия — во многих случаях это оправдано с методической точки зрения. Определение функции в школе необходимо ввести тогда, когда ученики накопят достаточный опыт в оперировании этим понятием. В нашей программе это предусмотрено в первом полугодии 9 класса.

2) *Постепенное введение в программу свойств функций, подлежащих изучению, на различных уровнях строгости.*

Перечислим те свойства функций, которые на том или ином уровнях строгости изучаются в различных разделах школьного курса алгебры: область определения, область значений функции, монотонность, четность, периодичность, непрерывность, выпуклость, ограниченность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, дифференцируемость. Естественно, учителей всегда беспокоят три вопроса:

— каким из этих понятий нужно дать в школе точное определение, а какие достаточно описать на наглядно-интуитивном или рабочем уровне;

— как и когда давать то или иное определение;

— если точное определение вводится позже первичного использования понятия, то каковы пропедевтика и динамика развития соответствующего понятия?

Эти вопросы далеко не праздные. Главная методическая ошибка — появление значительной части указанных свойств функций в более или менее полном объеме практически одновременно при изучении темы «Исследование функций с помощью производной» в 10—11 классах, что вызывает понятные затруднения у учащихся (из-за переизбытка информации). Это и педагогическая ошибка. Дело в том, что каждый учитель реализует в своей педагогической деятельности различные программы: интереса, памяти, развития и т. д. Среди них значительное место занимает программа развития речи (включающая, в частности, правильное употребление терминов математического языка). Не следует забывать, что в реальной жизни употребление в речи определенных терминов со смутным пониманием их значения часто предшествует полноценному пониманию, которое приходит после привыкания к терминам. Поэтому мы считаем не только возможным, но и полезным употребление школьниками, начиная с 7 класса, таких терминов, как, например, «непрерывность функции», «наибольшее и наименьшее значения функции», без знания строгих математических определений этих понятий, что и сделано в наших учебниках «Алгебра—7» и «Алгебра—8». В 8 классе на наглядно-интуитивном уровне мы ввели понятия выпуклости и ограниченности функции. И только в курсе алгебры 9 класса, после накопления соответствующего опыта, мы выходим на формальный уровень определения таких понятий, как «ограниченность функции», «наименьшее и наибольшее значения функции на промежутке» и т. д.

В чем состоит принципиальная трудность для учащихся в усвоении этих, казалось бы, несложных математических понятий, почему мы считаем необходимым готовить базу для введения формальных определений?

С точки зрения автора, который более 40 лет читает курс математического анализа в педагогическом университете, принципиальная трудность заключается в том, что неокрепший мозг ученика не в состоянии осмыслить наличие в одном определении двух кванторов — квантора общности («для всех», «для каждого», «для любого») и квантора существования («существует», «для некоторого») — в рамках одного предложения. «Существует» и «для любого» — это для школьника в определенном смысле противоречащие друг другу ситуации. С чем он встречается при определении понятия ограниченности или наибольшего и наименьшего значений функции на промежутке? Вспомним соответствующие определения.

Функцию $y = f(x)$ называют *ограниченной снизу (сверху)*, если все значения функции больше (меньше) некоторого числа. Иными словами, если *существует* число m (соответственно M) такое, что *для любого* значения x из области определения функции выполняется неравенство $f(x) > m$ (соответственно $f(x) < M$).

Число m называют *наименьшим (наибольшим) значением функции* $y = f(x)$ *на множестве* $X \subset D(f)$ если, во-первых, в X *существует* такая точка x_0, что $f(x_0) = m$ $(f(x_0) = M)$; во-вторых, *для всех* x из X выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant m \text{ (соответственно } f(x) \leqslant M).$$

Опыт показывает, что «двухкванторные определения» трудны для восприятия большинством школьников, поэтому особенно важна опережающая формальное определение опора на наглядность. В такой ситуации работают оба полушария головного мозга ученика: и правое, отвечающее за образы, и левое, отвечающее за формально-логическое мышление. Введя понятия наименьшего (наибольшего) значения функции в 7 классе, а понятие ограниченности функции в 8 классе, мы как раз и используем геометрические образы. Например, ограниченность сверху трактуется геометрически: весь график расположен ниже некоторой прямой. Обратите внимание: в последнем предложении фактически имеются оба квантора — *весь* график ниже *некоторой* прямой. Однако геометрическая иллюстрация помогает учащемуся преодолеть логические трудности. Вот так постепенно его ум «в порядок приводится».

Приведем таблицу стратегии и тактики изучения свойств функций в нашем курсе. *Стратегия* определяет время введения понятия (класс), а *тактика* — формирование уровней строгости предъявления понятия. В таблице приняты условные обозначения: **Н** — это значит, что соответствующее свойство функции вводится на наглядно-интуитивном уровне; **Р** — это значит, что свойство функции изучается на рабочем уровне, на уровне словесного описания, не загнанного в жесткую формальную конструкцию; **Ф** — это означает формальное определение свойства.

Свойство	**Класс**			
	7-й	**8-й**	**9-й**	**10-й**
Область определения	**Н**	**Р**	**Ф**	**Ф**
Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке	**Н**	**Р**	**Ф**	**Ф**
Монотонность	**Н**	**Р, Ф**	**Ф**	**Ф**
Непрерывность	**Н**	**Н**	**Н**	**Р, Ф**
Ограниченность	—	**Н, Р**	**Ф**	**Ф**
Выпуклость	—	**Н**	**Н**	**Н**
Область значений	**Н**	**Р**	**Ф**	**Ф**
Четность	—	—	**Ф**	**Ф**
Периодичность	—	—	—	**Ф**
Дифференцируемость	—	—	—	**Н**
Экстремумы	—	—	—	**Ф**

Сделаем некоторые комментарии к этой таблице. Во-первых, учитывая, что учащиеся 7—9 классов более восприимчивы к новым математическим понятиям (представленным хотя бы в ознакомительном плане), чем учащиеся 10—11 классов, мы все свойства функций, какие было можно, перенесли в основную школу; в старшей школе впервые появляются лишь три свойства функций (из 11).

Далее следует обратить внимание на то, что фактически весь 7 класс мы работаем с учащимися на наглядно-интуитивном уровне, весь 8 класс — на рабочем уровне и только в 9 классе выходим на формальный уровень. Поясним это на примере свойства монотонности функции.

В 7 классе, изучая график линейной функции, мы обращаем внимание на то, что этот график в одних случаях как бы идет «в горку», а в других — как бы спускается «с горки». В первом случае линейная функция называется возрастающей, во втором — убывающей (наглядно-интуитивный уровень). Изучая в 8 классе функцию $y = \sqrt{x}$ и квадратичную функцию, мы снова опираемся на наглядное представление о монотонности, но постепенно переходим на рабочий уровень: функция возрастает (убывает), если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. И только в конце 8 класса после изучения свойств числовых неравенств мы даем формальное определение монотонности функции.

3) Для понимания учащимися курса алгебры в целом прежде всего важно, чтобы они полноценно усвоили первичные модели (функции). Это значит, что нужно организовать деятельность по изучению той или иной функции так, чтобы рассмотреть новый объект (конкретную математическую модель — функцию) системно, с различных сторон, в разных ситуациях. В то же время не должно складываться ощущение набора случайных сюжетов, различных для разных классов функций, — это создаст ситуацию дискомфорта в обучении. Возникает методическая проблема выделения в системе упражнений по изучению того или иного класса функций *инвариантного ядра, универсального для любого класса функций*.

Инвариантное ядро в наших учебниках и задачниках состоит из шести направлений:

- графическое решение уравнений (неравенств);
- отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке;
- преобразование графиков;
- функциональная символика;
- кусочные функции;
- чтение графика.

Учащиеся постепенно привыкают к тому, что, какой бы новый класс функций они ни изучали, в системе упражнений обязательно будут упражнения, рассредоточенные по указанным шести блокам. Образно выражаясь, это шесть красок, с помощью которых изучаемая математическая модель — функция — становится емкой, цельной, понятной, красивой и привычной. Создается эффект предсказуемости деятельности, что делает совместную работу учителя и ученика на уроке достаточно комфортной.

Раскроем методические особенности каждого из указанных направлений.

Графическое решение уравнений. Графический (или, точнее, функционально-графический) метод решения уравнений должен, на наш взгляд, всегда быть первым и одним из главных при решении уравнений любых типов. Неудобства, связанные с применением графического метода, как правило, и создают ту проблемную ситуацию, которая приводит к необходимости отыскания алгоритмов аналитических способов решения уравнения. Эта идея проходит у нас красной нитью через весь школьный курс алгебры.

Что дает этот метод для изучения той или иной функции? Он приводит ученика к ситуации, когда график функции строится не ради графика, а для решения другой задачи — для решения уравнения. График функции становится *не целью, а средством*, помогающим решить уравнение. Это способствует и непосредственному изучению функции, и ликвидации того неприязненного отношения к функциям и графикам, которое, к сожалению, характерно для традиционных способов организации изучения курса алгебры в общеобразовательной школе. В наших учебных пособиях графический способ решения уравнения в большинстве случаев предшествует аналитическим способам. Учащиеся вынуждены применять его, привыкать и относиться к нему как к своему первому помощнику (они, образно выражаясь, обречены на дружбу с графическим методом), поскольку никаких других приемов решения того или иного уравнения к этому времени не знают. Опыт показывает, что графический метод решения уравнений им нравится, они чувствуют его полезность и красоту и в то же время ощущают проблемность ситуации, вызванную ненадежностью этого метода решения уравнения.

Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке. Начиная с 7 класса мы предлагаем учащимся задания такого типа: найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x + 3$ на отрезке $[1; 3]$. Предполагается, что учащиеся построят график функции $y = 2x + 3$, выделят часть графика на отрезке $[1; 3]$ и по графику найдут наибольшее и наименьшее значения функции. В чем методическая ценность подобного задания?

Во-первых, это новая «игра» с функцией, когда график нужен не сам по себе, а для ответа на вопрос задачи (опять график — не цель, а средство).

Во-вторых, сами того не осознавая, учащиеся привыкают к оперированию «двухкванторным», т. е. достаточно сложным, математическим понятием, восприятие которого требует как определенной подготовки, так и определенного уровня математической культуры (об этом мы уже говорили).

Преобразование графиков. В курсе алгебры 8 класса в теоретическом плане изучаются два преобразования: параллельный перенос — построение графика функции $y = f(x + l) + m$ с помощью известного графика функции $y = f(x)$ — и построение графика функции $y = -f(x)$. Какая бы функция ни изучалась, школьникам предлагается в системе упражнений выполнить то или иное преобразование ее графика. Так, в курсе 8 класса мы строим графики функций: $y = (x - 2)^2 + 1$, $y = \frac{3}{x} - 2$, $y = -\sqrt{x+1}$; в курсе 9 класса: $y = x^6 + 2$, $y = (x - 1)^7 - 1$, $y = \sqrt[3]{x-2}$ и т. д.

Функциональная символика. Как только в 7 классе появится запись $y = f(x)$, полезно предлагать учащимся примеры, нацеленные на осознание смысла модели $y = f(x)$, примеры на функциональную символику. Опыт показывает, что школьники часто не могут, например, исследовать функцию на четность не потому, что не знают определений четной или нечетной функции, а потому, что не понимают смысла записи $f(-x)$. Нередко учащиеся испытывают затруднения с производной только из-за технических трудностей: не понимают смысла записи $f(x + \Delta x)$ и вследствие этого не могут составить выражение для приращения функции даже в достаточно простых случаях. Это означает, что соответствующая работа не была проведена учителем в 7—9 классах. Поэтому считаем полезным включать в наши учебники и задачники задания следующего типа: для функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$, найти $f(0)$, $f(1)$, $f(a)$, $f(a - 1)$, $f(a + 2)$, $f(3a)$, $f(5x)$, $f(-x)$, $3f(x)$, $f(x^2)$ и т. п.

Кусочные функции. Для правильного формирования у учащихся как самого понятия функции, так и представления о методологической сущности этого понятия, полезно делать то, что до недавнего времени отсутствовало в большинстве школьных учебников, о чем забывали и авторы многочисленных методических рекомендаций. Речь идет о рассмотрении кусочных функций, т. е. функций, заданных различными формулами на разных промежутках области определения. Во многих случаях именно кусочные функции являются математическими моделями реальных ситуаций. Использование таких функций способствует преодолению обычного заблуждения учеников, отождествляющих функцию только с ее аналитическим заданием в виде некоторой формулы. В самом деле, чтобы задать функцию, надо указать область ее определения $D(f)$ и указать правило f, по которому каждому значению x из множества $D(f)$ сопоставляется определенное значение y. Если учащиеся имели дело с функциями, заданными аналитически одной формулой, заданными с помощью графика и особенно заданными различными формулами на разных промежутках, то они легче воспримут ту тонкость, которая содержится в определении («правило f»); менее вероятно при этом и отождествление ими «правила f» с «формулой f». Использование кусочных функций готовит как в пропедевтическом, так и в мотивационном плане понятие непрерывности. Использование на уроках кусочных функций дает возможность учителю сделать систему упражнений более разнообразной (что очень существенно для поддержания интереса к предмету у обучаемых), творческой (можно предложить учащимся самим сконструировать примеры). Отметим и воспитательный момент: это воспитание умения принять решение, зависящее от правильной ориентировки в условиях, это и своеобразная эстетика — оценка красоты графиков кусочных функций, предложенных разными учениками.

Чтение графика. Очень важно научить учащихся по графику описывать свойства функции, переходить от заданной геометрической модели (графика) к вербальной (словесной) модели. Конечно, в 7 классе этот перевод с одного языка на другой достаточно беден, но по мере появления новых свойств функций он становится все богаче (а значит, учащиеся видят, как они постепенно умнеют по мере изучения математики, что соответствует уже упомянутому выше принципу осознанности в теории развивающего обучения *Л. В. Занкова*). Наличие в курсе алгебры 9 класса достаточно большого числа свойств функций позволяет сделать процесс чтения графика интересным, разнообразным (с литературной точки зрения), многоплановым. У ученика теперь имеется возможность составить довольно четкий «словесный портрет» функции по ее графику.

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ КУРСА АЛГЕБРЫ ДЛЯ 7—9 КЛАССОВ

7 класс (102 ч)

Математический язык. Математическая модель (13 ч)

Числовые и алгебраические выражения. Переменная. Допустимое значение переменной. Недопустимое значение переменной. Первые представления о математическом языке и о математической модели. Линейные уравнения с одной переменной. Линейные уравнения как математические модели реальных ситуаций. Координатная прямая, виды промежутков на ней.

Линейная функция (11 ч)

Координатная плоскость. Алгоритм отыскания координат точки. Алгоритм построения точки $M(a; b)$ в прямоугольной системе координат.

Линейное уравнение с двумя переменными. Решение уравнения $ax + by + c = 0$. График уравнения. Алгоритм построения графика уравнения $ax + by + c = 0$.

Линейная функция. Независимая переменная (аргумент). Зависимая переменная. График линейной функции. Наибольшее и наименьшее значения линейной функции на заданном промежутке. Возрастание и убывание линейной функции.

Линейная функция $y = kx$ и ее график.

Взаимное расположение графиков линейных функций.

Системы двух линейных уравнений с двумя переменными (13 ч)

Система уравнений. Решение системы уравнений. Графический метод решения системы уравнений. Метод подстановки. Метод алгебраического сложения.

Системы двух линейных уравнений с двумя переменными как математические модели реальных ситуаций (текстовые задачи).

Степень с натуральным показателем (6 ч)

Степень. Основание степени. Показатель степени. Свойства степени с натуральным показателем. Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями. Степень с нулевым показателем.

Одночлены. Операции над одночленами (8 ч)

Одночлен. Коэффициент одночлена. Стандартный вид одночлена. Подобные одночлены.

Сложение одночленов. Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень. Деление одночлена на одночлен.

Многочлены. Арифметические операции над многочленами (15 ч)

Многочлен. Члены многочлена. Двучлен. Трехчлен. Приведение подобных членов многочлена. Стандартный вид многочлена.

Сложение и вычитание многочленов. Умножение многочлена на одночлен. Умножение многочлена на многочлен.

Квадрат суммы и квадрат разности. Разность квадратов. Разность кубов и сумма кубов.

Деление многочлена на одночлен.

Разложение многочленов на множители (18 ч)

Вынесение общего множителя за скобки. Способ группировки. Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращенного умножения, комбинации различных приемов. Метод выделения полного квадрата.

Понятие алгебраической дроби. Сокращение алгебраической дроби.

Тождество. Тождественно равные выражения. Тождественные преобразования.

Функция $y = x^2$ (9 ч)

Функция $y = x^2$, ее свойства и график. Функция $y = -x^2$, ее свойства и график.

Графическое решение уравнений.

Кусочная функция. Чтение графика функции. Область определения функции. Первое представление о непрерывных функциях. Точка разрыва. Разъяснение смысла записи $y = f(x)$. Функциональная символика.

Обобщающее повторение (9 ч)

8 класс (102 ч)

Алгебраические дроби (21 ч)

Понятие алгебраической дроби. Основное свойство алгебраической дроби. Сокращение алгебраических дробей.

Сложение и вычитание алгебраических дробей. Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраической дроби в степень.

Рациональное выражение. Рациональное уравнение. Решение рациональных уравнений (первые представления).

Степень с отрицательным целым показателем.

Функция $y = \sqrt{x}$. Свойства квадратного корня (18 ч)

Рациональные числа. Понятие квадратного корня из неотрицательного числа. Иррациональные числа. Множество действительных чисел.

Функция $y = \sqrt{x}$, ее свойства и график. Выпуклость функции. Область значений функции.

Свойства квадратных корней. Преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня. Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби. Модуль действительного числа. График функции $y = |x|$. Формула $\sqrt{x^2} = |x|$.

Квадратичная функция. Функция $y = \frac{k}{x}$ (18 ч)

Функция $y = ax^2$, ее график, свойства.

Функция $y = \frac{k}{x}$, ее свойства, график. Гипербола. Асимптота.

Построение графиков функций $y = f(x + l)$, $y = f(x) + m$, $y = f(x + l) + m$, $y = -f(x)$ по известному графику функции $y = f(x)$.

Квадратный трехчлен. Квадратичная функция, ее свойства и график. Понятие ограниченной функции. Построение и чтение графиков кусочных функций, составленных из функций $y = C$, $y = kx + m$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$.

Графическое решение квадратных уравнений.

Квадратные уравнения (21 ч)

Квадратное уравнение. Приведенное (неприведенное) квадратное уравнение. Полное (неполное) квадратное уравнение. Корень квадратного уравнения. Решение квадратного уравнения методом разложения на множители, методом выделения полного квадрата.

Дискриминант. Формулы корней квадратного уравнения. Параметр. Уравнение с параметром (начальные представления).

Алгоритм решения рационального уравнения. Биквадратное уравнение. Метод введения новой переменной.

Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций (текстовые задачи).

Частные случаи формулы корней квадратного уравнения.

Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

Иррациональное уравнение. Метод возведения в квадрат. Первые представления о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнения. Посторонние корни. Проверка корней.

Неравенства (15 ч)

Свойства числовых неравенств.

Неравенство с переменной. Решение неравенств с переменной. Линейное неравенство. Равносильные неравенства. Равносильное преобразование неравенства.

Квадратное неравенство. Алгоритм решения квадратного неравенства.

Возрастающая функция. Убывающая функция. Исследование функций на монотонность (с использованием свойств числовых неравенств).

Приближенные значения действительных чисел, погрешность приближения, приближение по недостатку и избытку. Стандартный вид числа.

Обобщающее повторение (9 ч)

9 класс (102 ч)

Рациональные неравенства и их системы (16 ч)

Линейные и квадратные неравенства (повторение).

Рациональное неравенство. Метод интервалов.

Множества и операции над ними.

Система неравенств. Решение системы неравенств.

Системы уравнений (15 ч)

Рациональное уравнение с двумя переменными. Решение уравнения $p(x; y) = 0$. Формула расстояния между двумя точками координатной плоскости. График уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Система уравнений с двумя переменными. Решение системы уравнений. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными.

Методы решения систем уравнений (метод подстановки, алгебраического сложения, введения новых переменных).

Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций (текстовые задачи).

Числовые функции (25 ч)

Функция. Независимая переменная. Зависимая переменная. Область определения функции. Естественная область определения функции. Область значений функции.

Способы задания функции (аналитический, графический, табличный, словесный).

Свойства функций (монотонность, ограниченность, выпуклость, наибольшее и наименьшее значения, непрерывность). Исследование функций:

$y = C$, $y = kx + m$, $y = kx^2$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$, $y = ax^2 + bx + c$.

Четные и нечетные функции. Алгоритм исследования функции на четность. Графики четной и нечетной функций.

Степенная функция с натуральным показателем, ее свойства и график. Степенная функция с отрицательным целым показателем, ее свойства и график.

Функция $y = \sqrt[3]{x}$, ее свойства и график.

Прогрессии (16 ч)

Числовая последовательность. Способы задания числовых последовательностей (аналитический, словесный, рекуррентный). Свойства числовых последовательностей.

Арифметическая прогрессия. Формула n-го члена. Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии. Характеристическое свойство.

Геометрическая прогрессия. Формула n-го члена. Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии. Характеристическое свойство. Прогрессии и банковские расчеты.

Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей (12 ч)

Комбинаторные задачи. Правило умножения. Факториал. Перестановки.

Группировка информации. Общий ряд данных. Кратность варианты измерения. Табличное представление информации. Частота варианты. Графическое представление информации. Полигон распределения данных. Гистограмма. Числовые характеристики данных измерения (размах, мода, среднее значение).

Вероятность. Событие (случайное, достоверное, невозможное). Классическая вероятностная схема. Противоположные события. Несовместные события. Вероятность суммы двух событий. Вероятность противоположного события. Статистическая устойчивость. Статистическая вероятность.

Обобщающее повторение (18 ч)

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА В 8 КЛАССЕ (3 ч в неделю[1]; всего 102 ч в год)

Глава 1
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

1.	Основные понятия	1 (2)
2.	Основное свойство алгебраической дроби	2 (4)
3.	Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями	2 (3)
4.	Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями	4 (5)
	Контрольная работа № 1	1 (1)
5.	Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраической дроби в степень	2 (4)
6.	Преобразование рациональных выражений	3 (3)
7.	Первые представления о решении рациональных уравнений	2 (3)
8.	Степень с отрицательным целым показателем	3 (3)
	Контрольная работа № 2	1 (1)

Глава 2
ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$. СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ

9.	Рациональные числа	2 (2)
10.	Понятие квадратного корня из неотрицательного числа	2 (3)
11.	Иррациональные числа	1 (2)
12.	Множество действительных чисел	1 (2)
13.	Функция $y = \sqrt{x}$, ее свойства и график	2 (3)
14.	Свойства квадратных корней	2 (3)
15.	Преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня	4 (5)
	Контрольная работа № 3	1 (1)
16.	Модуль действительного числа, график функции $y = \lvert x \rvert$, формула $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	3 (4)

[1] В скобках указано количество уроков из расчета 4 ч в неделю.

Глава 3
КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$

17.	Функция $y = kx^2$, ее свойства и график	3 (4)
18.	Функция $y = \frac{k}{x}$, ее свойства и график	2 (4)
	Контрольная работа № 4	1 (1)
19.	Как построить график функции $y = f(x + l)$, если известен график функции $y = f(x)$	2 (3)
20.	Как построить график функции $y = f(x) + m$, если известен график функции $y = f(x)$	2 (2)
21.	Как построить график функции $y = f(x + l) + m$, если известен график функции $y = f(x)$	2 (3)
22.	Функция $y = ax^2 + bx + c$, ее свойства и график	3 (4)
23.	Графическое решение квадратных уравнений	1 (2)
	Контрольная работа № 5	2 (2)

Глава 4
КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

24.	Основные понятия	2 (2)
25.	Формулы корней квадратных уравнений	3 (3)
26.	Рациональные уравнения	3 (4)
	Контрольная работа № 6	1 (1)
27.	Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций (текстовые задачи)	4 (4)
28.	Еще одна формула корней квадратного уравнения	2 (2)
29.	Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители	2 (3)
	Контрольная работа № 7	1 (1)
30.	Иррациональные уравнения	3 (4)

Глава 5
НЕРАВЕНСТВА

31.	Свойства числовых неравенств	3 (4)
32.	Исследование функций на монотонность	3 (3)
33.	Решение линейных неравенств	2 (3)
34.	Решение квадратных неравенств	3 (4)
	Контрольная работа № 8	1 (1)
35.	Приближенные значения действительных чисел, погрешность приближения, приближение по недостатку и избытку	2 (2)
36.	Стандартный вид числа	1 (1)
	Обобщающее повторение	7 (14)
	Итоговая контрольная работа	2 (2)

Глава 2

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ С УЧЕБНИКОМ

Тема 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Предполагается, что к началу изучения главы 1 учащиеся уже в достаточной степени овладели навыками сокращения алгебраических дробей — этим они довольно много занимались в 7 классе.

По существу в § 1 никакого продвижения вперед в деле изучения курса алгебры нет: напоминаются понятия алгебраической дроби, значения алгебраической дроби и допустимых значений переменных — об этом уже шла речь в курсе алгебры 7 класса. Тем не менее этот параграф очень существенен, поскольку в нем мы приступаем к решению проблемы, с которой сталкивались в 7 классе, — к делению многочленов.

Ключевое значение имеет пример 2; здесь первый этап математического моделирования (этап формализации) приводит к уравнению

$$\frac{10}{x+2} + \frac{6}{x-2} = 2,$$

которое ученики пока не в состоянии решить.

В связи с этим очень важно довести до учащихся ряд моментов.

1. Оказывается, в реальной жизни встречаются ситуации, математическое моделирование которых приводит к моделям, содержащим алгебраические дроби. Следовательно, алгебраические дроби — значимая составляющая математического языка, а поэтому необходимо их специальное изучение.

2. Нужно научиться выполнять арифметические операции над алгебраическими дробями, иначе нам не решить составленное уравнение.

3. Составленное уравнение придется отложить до лучших времен, т. е. до тех пор, когда мы, применяя новые знания, будем в состоянии его решить.

Нет ничего плохого в том, что задача оказывается брошенной на полпути — мы вернемся к ней позднее, в § 7 (этот параграф помещен в учебнике в основном ради указанного уравнения, ведь систематическое изучение рациональных уравнений начнется значительно позднее, в главе 4). Более того, такой педагогический прием даже полезен — учащиеся видят динамику развития курса, диалектику познания.

В **§ 3** и **4** идет обычный разговор о сложении алгебраических дробей сначала с одинаковыми, затем с разными знаменателями. Заметим, что пример 3 из **§ 4** можно опустить — он несколько выше уровня обязательных практических результатов обучения. То же относится к примеру на все действия с алгебраическими дробями из **§ 6** — это пример «финиша», ориентир на продвинутый уровень. На уроках к подобным примерам следует подбираться постепенно. И еще: лучше выполнять преобразования по действиям.

К сокращению дробей сводятся операции умножения и деления дробей, о которых идет речь в **§ 5**; несмотря на то что к моменту усвоения этого параграфа учащиеся уже накопят некоторый опыт сокращения дробей, имеет смысл и здесь начинать с очень простых упражнений, где на первый план выходит выполнение самих операций умножения и деления, а не следующие за ними преобразования полученных выражений. Поэтому, не переоценивая возможностей своих учеников, предложите им перед примером 1 из **§ 5** серию достаточно простых упражнений на умножение и деление алгебраических дробей:

$$\frac{2a}{3b}\cdot\frac{9b}{8a},\quad \frac{(a+b)^2}{a-b}:\frac{a+b}{(a-b)^2}\ \text{ и т. д.}$$

О значении **§ 7** мы уже говорили: рациональные уравнения как самостоятельный объект изучения пока нас не очень интересуют, их роль в другом — показать школьникам, что они не зря старались, изучая алгебраические дроби: эти знания пригодятся для моделирования реальных ситуаций, они расширяют наши возможности в применении математического языка.

Тема 2

ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$. СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ

В **§ 9** вводятся новые символы математического языка: N, Z, Q, теоретико-множественные знаки принадлежности, включения и их отрицания. Основной результат параграфа: рациональные числа и бесконечные десятичные периодические дроби — одно и то же.

Сделаем несколько замечаний по поводу того приема обращения бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную, который используется в учебнике.

1. Учитель должен понимать, что в этой процедуре есть скользкий (с формально-математической точки зрения) момент: ниоткуда не следует, что при умножении *бесконечной* десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. запятая передвигается вправо соответственно на один, два, три знака и т. д.; этот вывод был получен в курсе математики 5—6 классов лишь для *конечных* десятичных дробей. Сказать об этом школьникам или нет — дело учителя. Прийти к указанному выводу можно на примерах: скажем, дополнить некоторыми рассуждениями пример, рассмотренный в **§ 9**. Его результат $\frac{7}{22} = 0{,}3181818...$. Выполнив деление углом для дроби $\frac{70}{22}$, получим $3{,}181818...$; выполнив деление углом для дроби $\frac{7000}{22}$, получим $318{,}1818...$. Отмечаем, что в первом случае запятая сдвигается на один знак вправо, а во втором — на три знака.

2. Не всегда различные по записи бесконечные периодические десятичные дроби приводят к разным обыкновенным дробям. Это относится к дробям с девяткой в периоде. Например, для дроби $1{,}2(9)$ имеем:

$x = 1{,}2999...;$

$10x = 12{,}999...;$

$100x = 129{,}999...;$

$90x = 129 - 12 = 117;\ x = \frac{117}{90} = 1{,}3 = 1{,}3000... .$

Итак, $1{,}2(9) = 1{,}3(0)$. Аналогично можно показать, что $2{,}35(9) = 2{,}36(0)$; $3{,}(9) = 4{,}(0)$ и т. д.

Короче говоря, дробь с девяткой в периоде — это конечная десятичная дробь (или бесконечная с нулем в периоде); для ее записи достаточно отбросить всю периодическую часть бесконечной дроби, увеличив при этом на единицу цифру, предшествующую периодической части.

3. Известен формально более корректный способ обращения бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь: с помощью формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Например, для дроби $1{,}5(23)$ соответствующие вычисления выглядят следующим образом:

$$1{,}5(23) = 1{,}5 + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100\,000} + \frac{23}{10\,000\,000} + \ldots =$$

$$= 1{,}5 + \frac{23}{1000} : \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{3}{2} + \frac{23}{990} = \frac{754}{495}$$

(результат, естественно, тот же, что получен в примере из § 9).

Напомним еще раз, что линия, связанная с изучением функций, в нашем курсе приоритетная. Изучение квадратичной функции (гл. 3) предшествует изучению квадратных уравнений (им посвящена гл. 4). Точно так же будет обстоять дело и во всех других случаях, например, изучение тригонометрии в 10 классе будет начинаться с тригонометрических функций, а тригонометрические формулы появятся позднее. Ту же методическую линию вы обнаружите и в главе 2: понятие квадратного корня вводится при помощи графических соображений, а изучению свойств квадратных корней предшествует изучение функции $y = \sqrt{x}$.

Безусловно, определенные трудности возникнут и у вас, и у ваших учеников при изучении **§ 10**, где не только вводится новый термин, новое обозначение, но и имеется несколько достаточно серьезных моментов методологического плана. Это и первый пример доказательства методом от противного (а следовательно, и соответствующий комментарий учителя по этому поводу), это и общий разговор о введении новых символов математического языка, это и технически очень трудное для соответствующего возраста доказательство иррациональности числа $\sqrt{5}$ (сам термин «иррациональное число» пока не вводится). Вероятно, в большинстве случаев требовать от учащихся самостоятельного проведения доказательств иррациональности таких чисел, как $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, не следует, но показать им серьезное математическое рассуждение будет полезно. И еще один момент: не оставьте без должного внимания пример 2 из **§ 10**, где вычисление квадратного корня (разумеется, из числа, являющегося точным квадратом) осуществляется при помощи прикидки, интуиции и дедуктивных рассуждений. Приведем еще один пример подобного плана: вычислим $\sqrt{7921}$. Имеем $80^2 = 6400$, $90^2 = 8100$, а число 7921 заключено между 6400 и 8100. Значит, при извлечении квадратного корня из числа 7921 получится 80 «с хвостиком». Последней цифрой подкоренного числа является 1, значит, последней цифрой искомого числа может быть 1 или 9. Скорее всего это будет 9, поскольку подкоренное число 7921 ближе к 90^2 (а не к 80^2). Возникает гипотеза: $\sqrt{7921} = 89$. Вычисления показывают, что на самом деле $89^2 = 7921$.

В начале **§ 11** упомянуто, что $\sqrt{7}$ и $-\sqrt{7}$ не являются рациональными числами. Доказательство не дается, поскольку оно аналогично тому, что приведено в **§ 10** для числа $\sqrt{5}$: предположим, что $\sqrt{7} = \frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 7$, $m^2 = 7n^2$; m^2 кратно 7, следовательно, и m кратно 7, т. е. $m = 7k$. Далее имеем:

$(7k)^2 = 7n^2$, $n^2 = 7k^2$, n^2 кратно 7, поэтому и n кратно 7. Вывод: и m, и n — числа, кратные 7, поэтому дробь $\frac{m}{n}$ сократимая вопреки предположению. Получили противоречие, значит, $\sqrt{7}$ нельзя представить в виде обыкновенной дроби.

Впрочем, это доказательство можно сделать «чуть мягче»: равенство $\frac{m^2}{n^2} = 7$ невозможно, так как слева — несократимая дробь с отличным от 1 знаменателем, а справа — целое число.

Полезно обратить внимание учащихся на общий вывод: если n — натуральное число, то $\sqrt{n}$ — либо натуральное, либо иррациональное число. Этот вывод послужит им источником придумывания иррациональных чисел.

В **§ 12** обратите внимание на то, что разговор о свойствах арифметических операций, об отношении порядка ($<$, $>$) — не повторение старого, ведь до сих пор все это применялось лишь по отношению к рациональным числам; теперь же перешли в более широкую числовую область: мы имеем дело с действительными числами.

Очень емким по количеству информации является **§ 16**: определение, свойства, геометрический смысл модуля действительного числа, уравнения типа $|x - a| = b$, решение которых основано на геометрическом смысле выражения $|x - a|$, график функции $y = |x|$.

В учебнике функция $y = |x|$ рассматривается как существенный элемент в ряду основных школьных функций, таких как $y = kx + m$, $y = kx^2$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \sqrt{x}$. Поэтому в системе упражнений в соответствующем параграфе задачника, равно как в **§ 13**, где речь идет о функции $y = \sqrt{x}$, предусмотрена работа по традиционным для нашей концепции изучения функций шести направлениям *(инвариантное ядро)*, о которых мы говорили в главе 1 настоящего пособия.

Очень симпатично выглядит, например, графическое решение уравнения $\sqrt{x} = |x - 2|$. Построив графики соответствующих функций, убеждаемся, что они пересекаются в точках (1; 1) и (4; 2) (рис. 1). Значит, уравнение имеет два корня: 1; 4.

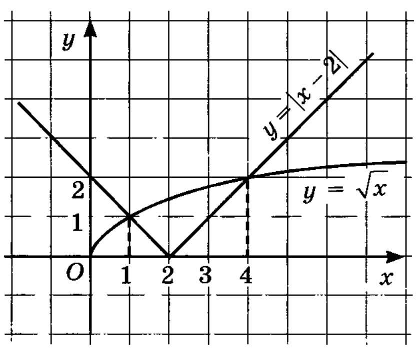

Рис. 1

Остальной материал главы 2 достаточно традиционен, отметим лишь три обстоятельства.

1. В учебнике понятие арифметического корня упомянуто лишь один раз на с. 46, поскольку для квадратных корней оно, по сути дела, лишено смысла: в курсе алгебры 7—9 нет «неарифметического» квадратного корня.

2. До **§ 16** действует договоренность: все переменные принимают только неотрицательные значения. Мы посчитали нецелесообразным с самого начала вводить формулу $\sqrt{a^2} = |a|$. Как говорится, не все сразу: в этой главе школьники знакомятся с новым понятием (квадратный корень), с новым символом математического языка, с новой функцией; для первого знакомства этого вполне достаточно — пусть научатся вычислять квадратные корни, привыкнут к их свойствам. Упомянутая же выше и очень трудно усваиваемая учащимися формула появится позднее, в **§ 16** о модуле действительного числа.

3. В конце **§ 10** с опережением учащимся сообщаются формулы корней квадратного уравнения. Дело в том, что в геометрии раньше, чем в алгебре, начинают применять теорему Пифагора. Конечно, у учащихся в активе есть приемы решения квадратных уравнений, известные им еще из курса алгебры 7 класса (графические приемы, разложение на множители), и в принципе этим и можно было бы пока ограничиться. Однако хотелось бы побыстрее сообщить им практическое значение нового понятия — квадратного корня, т. е. усилить мотивационный фон изучения нового материала.

Несколько слов об упражнениях, которые приведены в задачнике. Вы, наверное, обратили внимание, что упражнений, связанных с разными преобразованиями радикалов, в задачнике приведено в избытке. Это не случайно. Опыт показывает, что с технической точки зрения это самая трудная тема 8 класса, к которой учителю в порядке повторения систематически приходится возвращаться на уроках при изучении последующих тем курса. Упражнения, как правило, идут сериями: операции умножения или деления на радикал, раскрытие скобок в иррациональных выражениях, формулы сокращенного умножения, разложение на множители, сокращение алгебраических дробей, освобождение от иррациональности в знаменателе; далее идут упражнения на действия с алгебраическими дробями, содержащими иррациональности, и т. д.

Тема 3

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$

Эта тема является непосредственным продолжением и развитием тем «Линейная функция» и «Функция $y = x^2$», изученных в 7 классе, где, напомним, шел разговор по следующим направлениям: линейное уравнение с двумя переменными и его график, функция $y = kx + m$, функция $y = x^2$, функция $y = -x^2$, графическое решение уравнений, отыскание наибольших и наименьших значений функций на заданном промежутке, кусочные функции и, наконец, знакомство с математической моделью $y = f(x)$. Это следует иметь в виду, начиная изучение в первых двух параграфах главы 3 функций $y = kx^2$, $y = \frac{k}{x}$. Построение графиков этих функций особых методических комментариев не требует, мы на этом здесь на останавливаемся; поговорим лишь о том, что принципиально отличает наш учебник от других в изложении указанного материала.

В **§ 17** введено нетрадиционное для общеобразовательной школы понятие ограниченности функции *(снизу, сверху)*. Это сделано не ради самого понятия ограниченности (по большому счету в школе без него можно обойтись), а скорее по причинам психолого-педагогического характера.

Чем больше свойств функций знает ученик (хотя бы на наглядно-интуитивном уровне), тем любопытнее для него процесс чтения графика, процесс перевода графической модели на обычный язык. Образно выражаясь, при изучении математики имеется то, что можно назвать «черным хлебом», и то, что можно назвать «пирожными». «Черный хлеб» — это то, без чего нельзя обойтись (область определения, область значений функции, четность, монотонность и иные традиционные «школьные» свойства функций). Без «пирожных» (ограниченность, выпуклость и различные «изюминки» в других разделах школьного курса алгебры) обойтись можно, но они украшают повседневную рутинную реальность.

Ограниченность функции, непрерывность функции (равно как выпуклость функции в **§ 13**) введены для развития речи, для поддержания интереса к математике, для создания приятного эмоционального фона при ее изучении. Однако существует и более существенная причина появления в нашем курсе понятия ограниченной функции. Об этом мы уже ранее говорили в разделе «Концепция курса алгебры...», но тем не менее есть смысл вернуться к этому еще раз (в несколько измененной редакции).

Уровень трудности восприятия того или иного математического понятия часто зависит, говоря языком математики, от числа «навешанных» кванторов, явно или неявно фигурирующих в определении понятия (без кванторов нет практически ни одного математического определения). Речь идет о кванторе существования $\exists$ и кванторе общности $\forall$. Так, в определении четной или нечетной функции присутствует лишь один квантор: функция называется четной, если $\left(\forall x \in D\left(f\right)\right)$ $f(-x) = f(x)$; функция называется нечетной, если $(\forall x \in D(f))\ f(-x) = -f(x)$. Это, так сказать, «однокванторное» определение, определение первого уровня трудности, с ним особых проблем у учащихся не возникает. В традиционной программе школьного курса алгебры имеются три свойства функций, связанные с двумя кванторами: периодичность, экстремумы, наибольшие и наименьшие значения. Как правило, все они без всякой предварительной подготовки вводятся в курсе алгебры и начал математического анализа (10 класс), причем первым появляется наиболее трудное — определение периодичности. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если *существует* такое отличное от нуля число T, что *для всех x* из области определения функции выполняется равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

В кванторах:

$$(\exists T \neq 0)(\forall x \in D(f))\quad f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Чуть проще (хотя бы потому, что имеет понятную геометрическую иллюстрацию) выглядит двухкванторное определение наибольшего или наименьшего значения функции на промежутке X:

$$(\exists x_0 \in X)(\forall x \in X)\quad f(x_0) \leqslant f(x)\ (\text{здесь } f(x_0) = y_{\text{наим}}).$$

Понятия наибольшего и наименьшего значений функции используются в нашем курсе начиная с 7 класса: учащиеся, сами того не подозревая, постепенно приучаются к восприятию двухкванторных (а значит, достаточно сложных) определений математических понятий (опираясь на геометрическую наглядность).

Примерно так же обстоит дело с ограниченностью функции: функция ограничена снизу (сверху), если *весь* ее график расположен выше (ниже) *некоторой* горизонтальной прямой $y = m$; курсивом дано то, что связано с кванторами. Формальное определение функции, ограниченной, например, снизу, выглядит так:

$$(\exists m)(\forall x \in D(f))\ f(x) \geqslant m.$$

Таким образом, в нашем курсе определение ограниченности функции, кроме информационной значимости, имеет и существенную логико-методическую окраску (осознание учащимися структуры математических определений), т. е. имеет воспитательную ценность.

В **§ 21** приведены два алгоритма построения графика функции $y = f(x + l) + m$, если известен график функции $y = f(x)$. Более удачным является второй алгоритм, но это не означает, что все ваши ученики должны применять его на практике; пусть некоторые пользуются первым алгоритмом. Более того, если и первый алгоритм вызывает затруднения (в основном из-за наличия в нем символов $|l|$ и $|m|$), то замените первый алгоритм совокупностью двух правил, выделенных жирным шрифтом в **§ 19** и **20**.

В **§ 22**, где речь идет о построении графика квадратичной функции, делается акцент не на отыскание координат вершины параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, а на отыскании уравнения оси симметрии параболы $x = -\frac{b}{2a}$. Во-первых, построение оси параболы само по себе значимо с геометрической точки зрения: наличие оси параболы дает учащемуся возможность найти одну-две пары симметричных относительно оси точек параболы, которые используются как контрольные точки для более точного изображения эскиза графика. Во-вторых, зная уравнение оси $x = x_0$, ученик сможет найти ординату вершины параболы по формуле $y_0 = f(x_0)$, более важной, на наш взгляд, для понимания сути дела, чем требующая специального запоминания формула $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Тема 4

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предполагается, что к началу систематического изучения этой темы учащиеся уже имеют представление о том, что такое квадратное уравнение, имеют представление о графическом методе их решения, причем различными способами (например, отыскание точек пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью x; отыскание точек пересечения параболы $y = ax^2$ и прямой $y = -bx - c$; отыскание точек пересечения гиперболы $y = \frac{c}{x}$ и прямой $y = -ax - b$). Графический метод решения квадратных уравнений в простейших случаях применялся уже в 7 классе, в более сложных случаях — в теме «Квадратичная функция» в 8 классе. Далее, учащимся знаком метод разложения на множители, который в ряде случаев также дает возможность решить квадратное уравнение (о чем не раз шла речь в курсе алгебры 7 класса). Например, уравнение $ax^2 + bx = 0$ сводится к уравнению $x(ax + b) = 0$; уравнение $x^2 - c^2 = 0$ сводится к уравнению $(x - c)(x + c) = 0$; для уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$ имеем:

$$x^2 - 2x - 4x + 8 = 0 \text{ и далее } (x - 2)(x - 4) = 0$$
$$\text{или } (x^2 - 6x + 9) - 1 = 0, \text{ т. е. } (x - 3)^2 - 1 = 0,$$
$$(x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = 0 \text{ и т. д.}$$

С этого «смотра достижений» естественно начать систематическое изучение темы «Квадратные уравнения» в 8 классе, что фактически и делается в **§ 23** и **24**. Самое главное — осознать вместе с учащимися проблемную ситуацию, связанную с решением квадратных уравнений. Для этого надо выявить недостатки метода разложения на множители и графического метода. Метод разложения на множители применим не всегда (например, уравнение $x^2 + x - 3 = 0$ методом разложения на множители не решить), а графический метод в большинстве случаев может дать представление лишь о приближенных значениях корней (для того же уравнения $x^2 + x - 3 = 0$).

Таким образом, появляется необходимость найти алгоритм решения квадратных уравнений, не зависящий от эвристик метода разложения на множители и от ненадежности, приблизительности графического метода. После этого учащимся и будет сообщена (и обоснована) формула корней квадратного уравнения, которую они воспримут как «подарок судьбы».

В основном материал **§ 24** и **25** достаточно традиционен, методические новинки автора не носят глобального характера, и учитель легко выявит их по тексту учебника. Следует обратить ваше внимание лишь на примеры 7 и 8 из **§ 25** — примеры уравнений с параметром. Специально тема «Уравнения и неравенства с параметрами» в курсе алгебры 8 класса не выделена, такие уравнения и неравенства естественным образом вплетаются в общую ткань изложения в учебнике и имеются в задачнике.

Следующий параграф посвящен решению рациональных уравнений. Первое упоминание о таких уравнениях было сделано в **§ 7**, теперь же есть возможность выработать общий алгоритм решения рациональных уравнений, осмыслить три основных метода их решения: графический (который в основном до сих пор и использовался), преобразование уравнения к виду

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0,$$

введение новых переменных. Обратите внимание: пока нет общетеоретического разговора о равносильности уравнений, появлении посторонних корней, равносильных и неравносильных преобразованиях. Этот разговор состоится позднее, когда у учащихся накопится какой-то *опыт* и возникнет *потребность* в теоретических обобщениях. Та же методика реализована и в **§ 30**, посвященном иррациональным уравнениям (разумеется, простейшим). Пусть школьники привыкнут к двум случаям возможного появления посторонних корней: когда в уравнении содержатся алгебраические дроби или когда применяется метод возведения в квадрат обеих частей уравнения. Пусть они постепенно начнут понимать, в каких случаях нужно делать проверку найденных корней, начнут осознавать, что принципиальная проверка корней — необходимый этап решения уравнения (в двух упомянутых случаях). Что же касается технической проверки (т. е. столь любимой многими учителями проверки правильности вычислений и преобразований), то в нашем курсе она не приветствуется, поскольку, по сути дела, является бессмысленной.

Лишь в самом конце главы осуществлено первое в нашем курсе достаточно робкое вхождение в теорию равносильности уравнений (соответствующий разговор с учащимися проведен в конце **§ 30**). На наш взгляд, восьмиклассники должны иметь представление о том, что при решении уравнений выполняют разные преобразования:

член уравнения переносят из одной части уравнения в другую с противоположным знаком;

обе части уравнения умножают или делят на одно и то же отличное от нуля число;

освобождаются от знаменателя, т. е. заменяют уравнение $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ уравнением $p(x) = 0$;

обе части уравнения возводят в квадрат.

Учащиеся должны обратить внимание на то, что первые два из указанных выше преобразований оставляют корни уравнения в целости и сохранности (равносильные преобразования), а в результате двух других преобразований могут появиться посторонние корни (неравносильные преобразования), поэтому все найденные корни надо проверять.

О важности **§ 27**, где речь идет о текстовых задачах, говорить не приходится. Вы, наверное, уже привыкли к тому, что в нашей концепции реализуется идея математического моделирования, и решение всех текстовых задач оформляется в виде трех этапов математического моделирования. Не отказывайтесь от такого оформления (ради экономии времени и бумаги) даже в простых случаях.

Приступая к этапу составления математической модели, т. е. как бы осуществляя синхронный перевод текста задачи с обычного языка на математический, человек, решающий задачу, не всегда знает, к какой модели придет. Если он обходится одной переменной и все удалось перевести на математический язык, то получает уравнение с одной переменной. Если же ему не удалось обойтись одной переменной, то он получит систему уравнений. Кстати, по этой причине в конце **§ 27** приведен пример, где моделирование привело к системе уравнений и, стало быть, к очередной проблеме курса — проблеме решения систем уравнений (осуществляя линию опережающего обучения, что, как вы, наверное, заметили, вообще характерно для нашего курса алгебры, мы решили составленную систему уравнений методом подстановки; однако это совсем не означает, что аналогичные задачи следует рассматривать с учащимися уже в курсе алгебры 8 класса).

Обсудим еще одно обстоятельство, связанное с необходимостью явного выделения трех этапов математического моделирования при решении текстовых задач. На втором этапе решается математическая модель, которая составлена на первом этапе. Эта модель представляет собой рациональное уравнение. Для рационального уравнения имеется свой алгоритм решения, который в качестве последнего шага включает в себя проверку найденных корней (с целью отбросить те из них, которые обращают в нуль знаменатель дроби). На третьем этапе, где формулируется ответ на вопрос задачи, фактически также приходится делать проверку, но уже смысловую. Например, число -3 может быть корнем рационального уравнения, но не удовлетворять условиям, если за x принималось, скажем, время. Таким образом, есть два вида проверки, но ученики часто путают *принципиальную проверку* (проверку того, не является ли найденный корень посторонним для уравнения) и *смысловую проверку* (по условиям задачи), а если и не путают, то часто смешивают все в одну кучу. Явное выделение трех этапов математического моделирования позволит избежать указанных неприятностей: на втором этапе осуществляется принципиальная проверка, а на третьем — смысловая. В связи с этим проанализируйте предложенное в учебнике оформление решений задач в **§ 27** (особо выделим примеры 3, 4 и 5) и, в частности, то, как в учебнике проверка по модели отделяется от смысловой проверки (см. пример 4).

Обратите внимание еще на одну особенность метода математического моделирования. В примере 3 на первом этапе — этапе формализации (этапе составления математической модели) — появляется промежуточная геометрическая модель, которая затем помогает составить более привычную для курса алгебры аналитическую модель. Здесь необходимость появления геометрической модели как бы запрограммирована самой задачей — задачей геометрического содержания. Но такие промежуточные геометрические модели полезны и в иных случаях, например в задачах на движение.

В **§ 28** выводится упрощенная формула корней квадратного уравнения (для случая четного коэффициента при x). Почему в учебнике общая и частная формулы отстоят на довольно значительном расстоянии друг от друга? Опыт показывает, что если эти формулы дать одновременно, то учащиеся, как правило, вторую формулу игнорируют, они не хотят запоминать две формулы, понимая, что в принципе всегда можно обойтись одной (общей формулой), к которой еще нужно привыкать. Поэтому мы и даем им возможность сначала привыкнуть к общей формуле корней квадратного уравнения. К **§ 28** они уже накопят достаточный опыт в работе с общей формулой и смогут оценить те преимущества, которые дает им возможность использовать «четную» формулу (для чего, кстати, в **§ 28** в качестве примеров фигурируют уравнения, решенные ранее по общей формуле). Таким образом, частная формула не навязывается школьникам, а рекомендуется им как более «интеллигентная».

В § 30 фактически дается лишь первое представление о таком достаточно сложном классе уравнений, каким являются иррациональные уравнения: применяются лишь метод возведения обеих частей уравнения в квадрат и метод введения новой переменной, дается представление о возможности появления посторонних корней и, следовательно, о необходимости проверки. Никаких разговоров о пресловутой области допустимых значений (ОДЗ), об изысках в осуществлении проверки пока нет. Всему свое время — это сделано в нашем учебнике для 11 класса.

Покажем прием составления иррациональных уравнений вида $\sqrt{ax+b} = cx + d$, у которых один корень — посторонний; этот прием пригодится вам для составления вариантов контрольных, самостоятельных и различных проверочных работ.

Предположим, что мы хотим, чтобы после возведения обеих частей уравнения в квадрат получилось квадратное уравнение с корнями -3 и 5, причем 5 — посторонний корень для данного иррационального уравнения, а -3 — корень уравнения. Возьмем в качестве правой части иррационального уравнения выражение $4 - x$; оно отрицательно при $x = 5$ и положительно при $x = -3$. Составим квадратное уравнение с корнями 5, -3: $x^2 - 2x - 15 = 0$. Возведем в квадрат обе части иррационального уравнения с выбранной правой частью:

$$\sqrt{ax+b} = 4 - x;$$
$$ax + b = 16 - 8x + x^2;$$
$$x^2 - (a + 8)x + (16 - b) = 0.$$

Значит, должно выполняться тождество $x^2 - (a + 8)x + (16 - b) = x^2 - 2x - 15$. Отсюда следует, что $a + 8 = 2$, т. е. $a = -6$; $16 - b = -15$, т. е. $b = 31$. Искомое иррациональное уравнение таково: $\sqrt{31 - 6x} = 4 - x$.

Рассмотрим еще один пример. Пусть правая часть уравнения имеет вид $2x - 3$. Она отрицательна, например, при $x = 1$ и положительна, например, при $x = 6$. Составим квадратное уравнение с корнями 1 и 6: $x^2 - 7x + 6 = 0$. Именно таким должно получиться уравнение после возведения в квадрат обеих частей иррационального уравнения $\sqrt{ax+b} = 2x - 3$. Имеем:

$$ax + b = (2x - 3)^2;\ 4x^2 - (12 + a)x + (9 - b) = 0;$$

$$x^2 - \frac{12+a}{4}x + \frac{9-b}{4} = 0.$$

Значит, $\frac{12+a}{4} = 7$, $\frac{9-b}{4} = 6$, откуда получаем: $a = 16$, $b = -15$.

Искомое иррациональное уравнение таково: $\sqrt{16x-15} = 2x - 3$. Решая его методом возведения в квадрат, вы как раз и получите два корня 1 и 6, один из которых является посторонним, а другой удовлетворяет иррациональному уравнению, в чем легко убедиться с помощью проверки.

Тема 5

НЕРАВЕНСТВА

Эта тема придает завершенность всему материалу, который был пройден в 8 классе. В самом деле, в **§ 31** завершается разговор о действительных числах, начатый в главе 2 (в ней изучались арифметические операции на множестве действительных чисел, теперь же множество действительных чисел рассматривается как упорядоченное множество). При этом следует подчеркнуть, что на интуитивном уровне свойства числовых неравенств используются и в курсе математики 5—6 классов, да и в курсе алгебры 8 класса они применялись (например, при раскрытии знака модуля); так что предварительное знакомство с этой темой уже состоялось. В **§ 33** развивается заложенная в главе 4 идея равносильности и равносильных преобразований — на этот раз на материале линейных неравенств. Принципиально важен **§ 34**, в котором соединены две главные темы всего курса алгебры 8 класса: решение квадратных уравнений и построение графика квадратичной функции. Наконец, определив в **§ 32** понятие монотонности функции, вы имеете возможность повторить весь связанный с функциями материал 8 класса.

Безусловно, учитель, выстраивая для себя методику изучения неравенств в 8 классе, должен знать, какое продолжение получит эта тема в старших классах, — это позволит ему сделать правильные акценты в изложении текущего материала. В начале 9 класса изучается тема «Рациональные неравенства и их системы». Предполагается освоение метода интервалов в достаточной степени общности. Упоминание же метода интервалов в § 34 применительно к квадратным неравенствам рассматривайте как очередной элемент опережающего обучения. Но при этом учтите следующее обстоятельство: квадратные неравенства в 8 классе интересуют нас не как цель, а как средство для более глубокого усвоения ключевых моментов курса: квадратных уравнений и графика квадратичной функции. Позднее, в 11 классе, предполагается изучение показательных и логарифмических неравенств, а завершается изучение всего курса алгебры обзорной темой «Уравнения, неравенства, системы уравнений, системы неравенств», где будут подведены итоги изучения уравнений и неравенств с 7 по 11 класс: равносильные и неравносильные преобразования, причины появления посторонних решений и потери решений, способы проверки, основные методы решения уравнений (неравенств), уравнения и неравенства с параметрами.

Вернемся к теме «Решение квадратных неравенств». Подчеркнем еще раз: не следует увлекаться в 8 классе методом интервалов. Гораздо важнее довести до учащихся следующую мысль: решая неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, достаточно сделать схематический набросок графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, для чего требуется лишь найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ — точки пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью x — и определить, куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы. Этот схематический набросок даст наглядное истолкование решению неравенства. Полезно иметь в математическом кабинете таблицы, содержащие графические модели всех случаев решения квадратных неравенств: таблицы с тремя случаями расположения параболы относительно оси x при решении неравенств $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$, где $a > 0$, и аналогичные таблицы для случая $a < 0$.

В § 35, где речь идет о приближенных вычислениях, дается представление об округлении действительных чисел, о приближениях по недостатку и по избытку, об оценке точности приближения, об абсолютной погрешности. Опыт показывает, что понятие относительной погрешности основной массой школьников на уроках математики не усваивается, поскольку не получает адекватного практического применения. Мы считаем целесообразным ограничиться понятием абсолютной погрешности, а знакомство с понятием относительной погрешности должно произойти на уроках по другим предметам (например, на уроках физики, где это понятие сразу найдет приложение на практике).

Глава 3

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ УПРАЖНЕНИЙ ИЗ ЗАДАЧНИКА

1.38. Зная, что $\frac{a+2b}{b}=7$, найти значение выражения:

а) $\frac{a}{b}$; б) $\frac{2a-b}{2b}$; в) $\frac{2a+3b}{b}$; г) $\frac{4b-a}{2a}$.

Решение. а) Из условия следует, что

$\frac{a}{b}+\frac{2b}{b}=7$, т. е. $\frac{a}{b}+2=7$, $\frac{a}{b}=5$.

б) $\frac{2a-b}{2b}=\frac{2a}{2b}-\frac{b}{2b}=\frac{a}{b}-\frac{1}{2}=5-\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}$.

в) $\frac{2a+3b}{b}=\frac{2a}{b}+\frac{3b}{b}=2\cdot 5+3=13$.

г) Так как $\frac{a}{b}=5$, то $\frac{b}{a}=\frac{1}{5}$. Следовательно,

$$\frac{4b-a}{2a}=\frac{4b}{2a}-\frac{a}{2a}=2\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}.$$

2.47. Доказать, что если в дроби $\frac{a^3-2b^3}{3a^3-a^2b-4ab^2}$ переменные a и b заменить соответственно на pa и pb, то получим дробь, тождественно равную данной. Используя доказанное тождество, найти значение заданной дроби при:

а) $a=\frac{5}{113}$, $b=\frac{4}{113}$; б) $a=65$, $b=52$.

Решение.

$$\frac{(pa)^3-2(pb)^3}{3(pa)^3-(pa)^2(pb)-4(pa)(pb)^2}=\frac{p^3\left(a^3-2b^3\right)}{p^3\left(3a^3-a^2b-4ab^2\right)}=\frac{a^3-2b^3}{3a^3-a^2b-4ab^2}.$$

а) Проводить здесь вычисления «в лоб», разумеется, нецелесообразно. Воспользовавшись доказанным тождеством, поступим так: вместо заданных значений a и b подставим pa и pb, где $p=113$; значит, $pa=5$, $pb=4$. Получим

$$\frac{5^3-2\cdot 4^3}{3\cdot 5^3-5^2\cdot 4-4\cdot 5\cdot 4^2}=\frac{1}{15}.$$

б) Рассуждая как в пункте а), выберем $p = \frac{1}{13}$. Тогда $pa = 5$, $pb = 4$ и, как и выше, получаем $\frac{1}{15}$.

2.48. Построить график функции:

а) $y = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 2x - 8}{x^2 + 2}$; б) $y = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 2x - 8}{x - 4} - 2$.

Решение. а) $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 = x^2(x - 4) + 2(x - 4) = (x - 4) \times$ $\times (x^2 + 2)$.

Значит, сократив дробь, получим $y = x - 2$. Остается лишь построить график этой линейной функции.

б) Сократив дробь на $x - 4$, получим в итоге $y = x^2$. Графиком заданной функции служит парабола $y = x^2$ с выколотой точкой (4; 16).

4.56. Доказать тождество

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}} = \frac{32}{1-a^{32}}.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} = \frac{2}{1-a^2};\ \frac{2}{1-a^2} + \frac{2}{1+a^2} = \frac{4}{1-a^4};\ \frac{4}{1-a^4} + \frac{4}{1+a^4} = \frac{8}{1-a^8};$$

$$\frac{8}{1-a^8} + \frac{8}{1+a^8} = \frac{16}{1-a^{16}};\ \frac{16}{1-a^{16}} + \frac{16}{1+a^{16}} = \frac{32}{1-a^{32}}.$$

При желании можно предложить учащимся угадать, чему будет равна сумма семи дробей — шести указанных в левой части тождества и дроби $\frac{32}{1 + a^{32}}$. А если добавить еще $\frac{64}{1 + a^{64}}$? В достаточно сильном классе можно попытаться сформулировать тождество в общем виде:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} +$$
$$+ \frac{16}{1+a^{16}} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{1+a^{2^{n-1}}} = \frac{2^n}{1-a^{2^n}}.$$

6.19. При $a = -3{,}2746$ найти значение выражения

$$\frac{2-a}{5} + \left(\frac{1}{1-2a}\right)^2 : \left(\frac{a+2}{4a^3 - 4a^2 + a} - \frac{2-a}{1-8a^3} \cdot \frac{4a^2 + 2a + 1}{2a^2 + a}\right).$$

Решение. 1) $\dfrac{2-a}{1-8a^3} \cdot \dfrac{4a^2 + 2a + 1}{2a^2 + a} = \dfrac{a-2}{a(2a-1)(2a+1)}$;

2) $\dfrac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\dfrac{a-2}{a(2a-1)(2a+1)}=$

$=\dfrac{a+2}{a(2a-1)^2}-\dfrac{a-2}{a(2a-1)(2a+1)}=\dfrac{10}{(2a-1)^2(2a+1)};$

3) $\left(\dfrac{1}{1-2a}\right)^2:\dfrac{10}{(2a-1)^2(2a+1)}=\dfrac{2a+1}{10};$

4) $\dfrac{2-a}{5}+\dfrac{2a+1}{10}=\dfrac{1}{2}.$

Итак, данное выражение принимает одно и то же значение 0,5 при всех *допустимых* значениях a, т. е. при $a \neq 0$, $\pm\frac{1}{2}$. Заданное значение $a=-3{,}2746$ является допустимым (на это следует обратить внимание учащихся), поэтому искомое значение выражения равно 0,5.

6.23. Доказать, что при любых значениях $x > 2$ значение выражения $\left(\dfrac{x+1}{2x}+\dfrac{4}{x+3}-2\right):\dfrac{x+1}{x+3}-\dfrac{x^2-5x+3}{2x}$ является отрицательным числом.

Решение. После несложных преобразований получится $\frac{2-x}{2}$, это выражение отрицательно при любых $x > 2$. Надо лишь убедиться, что все значения $x > 2$ являются допустимыми. Это на самом деле так, поскольку недопустимыми для заданного выражения являются значения $x = 0, -3, -1$.

7.37. г) Решить уравнение $\dfrac{1}{4x-6}+\dfrac{2x-5}{18-8x^2}-\dfrac{1}{2x^2+3x}=0.$

Решение. Поработаем с левой частью уравнения:

$$\frac{1}{2(2x-3)}-\frac{2x-5}{2(2x-3)(2x+3)}-\frac{1}{x(2x+3)}=$$

$$=\frac{x(2x+3)-x(2x-5)-2(2x-3)}{2x(2x-3)(2x+3)}=$$

$$=\frac{2(2x+3)}{2x(2x-3)(2x+3)}=\frac{1}{x(2x-3)}.$$

Уравнение $\dfrac{1}{x(2x-3)}=0$ корней не имеет.

7.40. а) Алгебраическое выражение

$$\frac{(n+1)y}{3}+\frac{(3n-1)y^2}{5}+y^3$$

принимает значение -21 при $y = -3$ и при некотором значении n. Чему равно значение того же выражения при том же значении n и при $y = \frac{1}{3}$?

Решение. 1) Подставив в данное выражение вместо y его значение -3, получим:

$$\frac{-3(n+1)}{3} + \frac{9(3n-1)}{5} + (-27) = -21.$$

2) Решив это уравнение, находим $n = 2$.

3) Подставив в заданное выражение значения $n = 2$, $y = \frac{1}{3}$, получим

$$\frac{2+1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6-1}{5} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27}.$$

8.30. Доказать тождество

$$\left(\frac{y^2(xy^{-1}-1)^2}{x(1+x^{-1}y)^2} \cdot \frac{y^2(x^{-2}+y^{-2})}{x(xy^{-1}+x^{-1}y)}\right) : \frac{1-x^{-1}y}{xy^{-1}+1} = \frac{x-y}{x+y}.$$

Решение. 1) $y^2(xy^{-1}-1)^2 = (y(xy^{-1}-1))^2 = (x-y)^2$;

2) $x\left(1+x^{-1}y\right)^2 = x\left(1+\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{x}$;

3) $y^2\left(x^{-2}+y^{-2}\right) = y^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) = \frac{x^2+y^2}{x^2}$;

4) $x\left(xy^{-1}+x^{-1}y\right) = x\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2+y^2}{y}$;

5) $\frac{(x-y)^2 x}{(x+y)^2} \cdot \frac{\left(x^2+y^2\right)y}{x^2\left(x^2+y^2\right)} = \frac{y(x-y)^2}{x(x+y)^2}$;

6) $1-x^{-1}y = 1-\frac{y}{x} = \frac{x-y}{x}$;

7) $xy^{-1}+1 = \frac{x}{y}+1 = \frac{x+y}{y}$;

8) $\frac{y(x-y)^2}{x(x+y)^2} : \frac{(x-y)y}{x(x+y)} = \frac{x-y}{x+y}$.

8.32. Доказать тождество

$$\left(\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-2n}-a^{-n}b^{-n}+b^{-2n}}\right)^{-1} + \left(\frac{a^{n}+b^{-n}}{a^{-2n}+a^{-n}b^{-n}+b^{-2n}}\right)^{-1} = \frac{2a^{-n}b^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}.$$

Решение. Введем новые переменные: $x = a^{-n}$, $y = b^{-n}$. Тогда доказываемое тождество примет следующий вид:

$$\left(\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}\right)^{-1} + \left(\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}\right)^{-1} = \frac{2xy^{-2}}{y^{-2}-x^{-2}}.$$

После несложных преобразований и в левой, и в правой частях доказываемого тождества получим $\frac{2x^3}{x^2-y^2}$.

10.41. Доказать, что не является целым числом квадратный корень из 8467, 2215, 2113, 1228.

Решение. Квадрат целого числа не может оканчиваться цифрами 7, 3 и 8. Поэтому первое, третье и четвертое числа не являются точными квадратами. Квадрат целого числа может оканчиваться цифрой 5, но при этом цифрой десятков обязательно будет 2, чего нет у заданного второго числа. Следовательно, и оно не является точным квадратом.

11.16. Доказать, что на графике функции $y = \sqrt{2} \cdot x$ имеется только одна точка, у которой и абсцисса, и ордината — целые числа.

Решение. Точка (0; 0) принадлежит графику функции. Предположим, что на графике есть точка с целочисленными отличными от нуля координатами $(p;\ q)$. Тогда $q = \sqrt{2} \cdot p$, $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$, т. е. $\sqrt{2}$ — рациональное число, что неверно.

11.17. Доказать, что на графике функции $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$ имеется только одна точка, у которой и абсцисса, и ордината — целые числа.

Решение. Предположим, что на графике заданной функции есть точка с целочисленными координатами $(r;\ q)$. Тогда $q = \sqrt{3} \cdot r + \sqrt{3}$. Если $r = -1$, то $q = 0$; если $r \neq -1$, то $\sqrt{3} = \frac{q}{r+1}$, т. е. $\sqrt{3}$ — рациональное число, что неверно. Следовательно, на графике заданной линейной функции есть лишь одна точка с целочисленными координатами — точка $(-1;\ 0)$.

Оба эти упражнения можно несколько усложнить, придав им более творческий характер.

Пример 1. Придумать такую линейную функцию $y = kx$, на графике которой нет ни одной точки с целочисленными координатами, кроме начала координат. Сколько таких функций можно придумать?

Таких функций можно придумать бесконечно много, например $y = \sqrt{n} \cdot x$, где n — натуральное число, не являющееся точным квадратом.

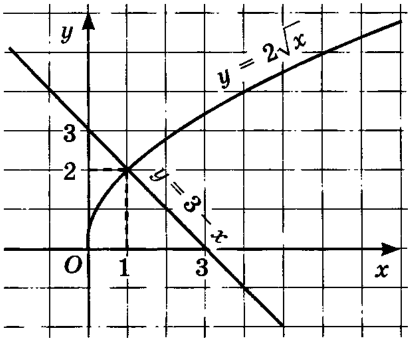

Рис. 2

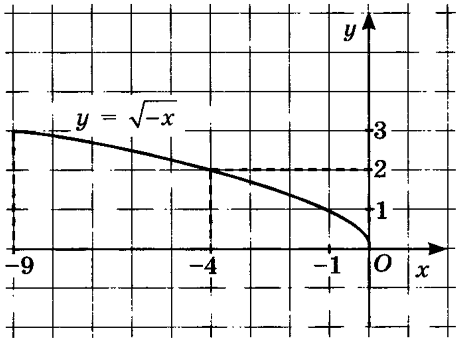

Рис. 3

Пример 2. Придумать такую линейную функцию $y = kx + m$, на графике которой имеется лишь одна точка с рациональными координатами. Сколько таких функций можно придумать?

Таких функций можно придумать бесконечно много, например $y = \sqrt{n} \cdot x + \sqrt{n}$, где n — натуральное число, не являющееся точным квадратом.

13.30. б) Решить графически уравнение $2\sqrt{x} = 3 - x$.

Решение. На самом деле это уравнение объективно не может считаться уравнением повышенной сложности. Если оно отнесено к таковым, то по сугубо методическим причинам. Во-первых, в теоретическом плане речь еще не шла о построении графиков функций вида $y = kf(x)$ с помощью растяжения от оси абсцисс, так что здесь придется строить график по точкам, опираясь на интуицию. Во-вторых, здесь можно впервые поговорить о наличии единственного корня у уравнения вида $f(x) = g(x)$, где функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ имеют разный характер монотонности.

Данное уравнение имеет единственный корень $x = 1$ (рис. 2).

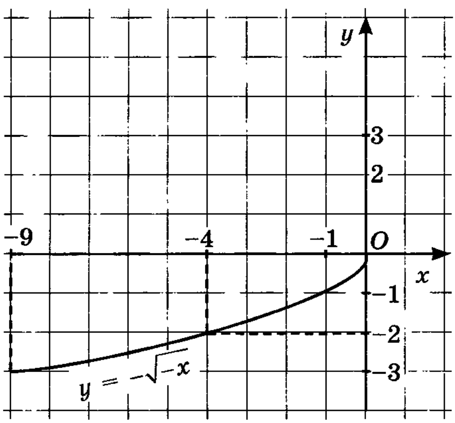

Рис. 4

13.31. Построить график функции:

а) $y = \sqrt{-x}$; б) $y = -\sqrt{-x}$.

Решение. Графики представлены на рисунках 3 и 4. Есть смысл обратить внимание учащихся на то, что график первой функции симметричен графику функции $y = \sqrt{x}$ относительно оси ординат, а

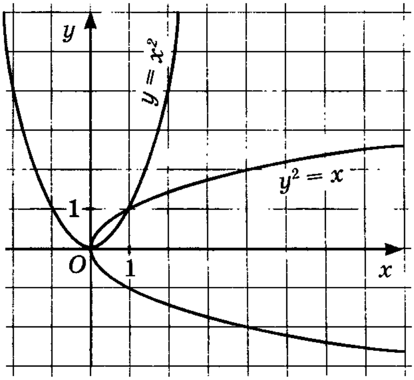

Рис. 5

график второй функции симметричен графику функции $y = \sqrt{x}$ относительно начала координат.

13.32. б) Построить график уравнения $(y - x^2)(y^2 - x) = 0$.

Решение. Так как произведение двух множителей равно нулю, равен нулю либо первый, либо второй множитель: либо $y = x^2$, либо $y^2 = x$. Из последнего уравнения следует, что либо $y = \sqrt{x}$, либо $y = -\sqrt{x}$. Таким образом, график заданного уравнения есть объединение графиков трех функций: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$; график уравнения представлен на рисунке 5.

14.36. Известно, что $f(x) = -\sqrt{x}$. Доказать, что:

б) $f(x^4) = -(f(x))^4$; г) $f(x^5) = x^2 f(x)$.

Решение. б) $f(x^4) = -\sqrt{x^4} = -x^2 = -\left(-\sqrt{x}\right)^4 = -(f(x))^4$;

г) $f(x^5) = -\sqrt{x^5} = -x^2\sqrt{x} = x^2\left(-\sqrt{x}\right) = x^2 f(x)$.

15.100. Вычислить: а) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

Решение.

а) Имеем: $7 + 4\sqrt{3} = 7 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2$.

Значит,

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2} = 2 + \sqrt{3}.$$

б) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} = \sqrt{2} - 1$.

Записывая ответ, не забудьте проверить, положительным ли числом является полученный результат. Типичная ошибка:

$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{2}\right)^2} = 1 - \sqrt{2}$. Это неверно, поскольку $1 - \sqrt{2} < 0$.

15.104. Проверить равенство

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 1.$$

Решение.

1) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 2\right)^2} = \sqrt{5} - 2$;

2) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{\left(3 - \sqrt{5}\right)^2} = 3 - \sqrt{5}$;

3) $\left(\sqrt{5}-2\right)+\left(3-\sqrt{5}\right)=1.$

Аналогичная идея используется и в **№ 15.105.**

$$\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}=2+\sqrt{2};$$

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}=2-\sqrt{2}.$$

15.106. Упростить выражение $\sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

Решение.

1) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}=2\sqrt{2}+1;$

2) $\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}+1;$

3) $\sqrt{10+8\left(\sqrt{2}+1\right)}=\sqrt{18+8\sqrt{2}}=\sqrt{\left(4+\sqrt{2}\right)^2}=4+\sqrt{2}.$

16.33. а) Упростить выражение $\sqrt{\left(5-\sqrt{30}\right)^2}+\sqrt{\left(6-\sqrt{30}\right)^2}$.

Решение. Имеем: $|5-\sqrt{30}|+|6-\sqrt{30}|$. Далее следует учесть, что $5<\sqrt{30}$, а $6>\sqrt{30}$. Следовательно,

$$|5-\sqrt{30}|=\sqrt{30}-5;$$

$$|6-\sqrt{30}|=6-\sqrt{30}.$$

Сложив числа, получим 1.

Ответ: 1.

16.34. Упростить выражение $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-3x}$, если:

а) $x<0$; б) $0<x<1$; в) $x>1$; г) $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{4}$.

Решение. а) Если $x<0$, то $|x-1|=1-x$, $|x|=-x$. Заданное выражение принимает вид $\dfrac{1-x-x+x}{3x(x-1)}$, т. е. $-\dfrac{1}{3x}$.

б) Если $0<x<1$, то $|x-1|=1-x$, $|x|=x$. Заданное выражение принимает вид $\dfrac{1-x+x+x}{3x(x-1)}$, т. е. $\dfrac{x+1}{3x(x-1)}$.

в) Если $x>1$, то $|x-1|=x-1$, $|x|=x$. Заданное выражение принимает вид $\dfrac{x-1+x+x}{3x(x-1)}$, т. е. $\dfrac{3x-1}{3x(x-1)}$.

г) Если $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$, то $|x-1| = 1 - x$, $|x| = x$. Заданное выражение принимает вид $\frac{1 - x + x + x}{3x(x-1)}$, т. е. $\frac{x+1}{3x(x-1)}$.

16.37. Упростить выражение

$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} - 2\sqrt{x^2 - 10x + 25}$, если:

а) $x < -1$; б) $-1 < x < 2$; в) $2 < x < 5$; г) $x > 5$.

Решение.

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} - 2\sqrt{x^2 - 10x + 25} =$$
$$= \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2} - 2\sqrt{(x-5)^2} =$$
$$= |x-2| + |x+1| - 2|x-5|.$$

а) Если $x < -1$, то $|x-2| = -(x-2)$, $|x+1| = -(x+1)$, $|x-5| = -(x-5)$.

Значит, $|x-2| + |x+1| - 2|x-5| = -(x-2) - (x+1) + 2(x-5) = -9$.

б) Если $-1 < x < 2$, то $|x-2| = -(x-2)$, $|x+1| = x+1$, $|x-5| = -(x-5)$.

Значит, $|x-2| + |x+1| - 2|x-5| = -(x-2) + (x+1) + 2(x-5) = 2x - 7$.

в) Если $2 < x < 5$, то $|x-2| = x-2$, $|x+1| = x+1$, $|x-5| = -(x-5)$.

Значит, $|x-2| + |x+1| - 2|x-5| = (x-2) + (x+1) + 2(x-5) = 4x - 11$.

г) Если $x > 5$, то $|x-2| = x-2$, $|x+1| = x+1$, $|x-5| = x-5$.

Значит, $|x-2| + |x+1| - 2|x-5| = (x-2) + (x+1) - 2(x-5) = 9$.

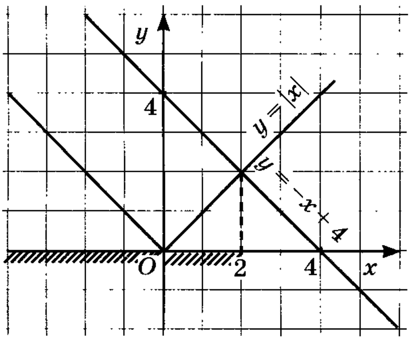

Рис. 6

16.41. а) Решить графически неравенство $|x| \leqslant -x + 4$.

Решение. Построив в одной системе координат графики функций $y = |x|$, $y = -x + 4$, получим решение заданного неравенства: $x \leqslant 2$ (рис. 6). Следует обратить внимание учащихся на то, что левая ветвь графика функции

$y = |x|$ параллельна графику функции $y = -x + 4$.

В № **16.42—16.44** требуется построить графики функций, аналитическое задание которых содержит знаки модуля. Во всех случаях есть смысл перейти к кусочному заданию функции, раскрыв знаки модуля. Например, в № **16.43** а) вместо $y = \sqrt{x^2} + x$ полезно перейти к такой записи: $y = |x| + x$, т. е.

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{если} \quad x \geqslant 0; \\ 0, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

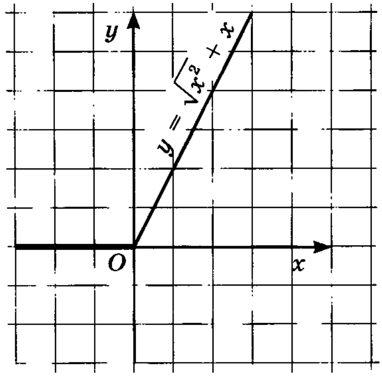

Рис. 7

График этой функции изображен на рисунке 7.

17.60. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2$. При каких значениях аргумента выполняется равенство $4f(x + 3) = f(2x) - 24$?

Решение. Имеем $f(x + 3) = 2(x + 3)^2$; $f(2x) = 2(2x)^2$. Значит, фактически речь идет о решении уравнения

$$4 \cdot 2(x + 3)^2 = 2(2x)^2 - 24.$$

Последовательно получаем:

$$8(x^2 + 6x + 9) = 8x^2 - 24;$$
$$48x = -96;$$
$$x = -2.$$

Это поучительный пример работы с функциональной символикой, в котором к тому же естественным образом используются знания из других разделов (операции с многочленами, формулы сокращенного умножения, решение уравнений). Такое «непринудительное» повторение приносит, на наш взгляд, больше пользы, чем повторение «по воле учителя» (или авторов задачника).

17.62. Построить график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{если} \quad -4 \leqslant x \leqslant -1; \\ 2x^2, & \text{если} \quad -1 < x \leqslant -1; \\ -x + 3, & \text{если} \quad 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

С помощью графика определить, при каких значениях p уравнение $f(x) = p$ имеет один, два, три, четыре корня.

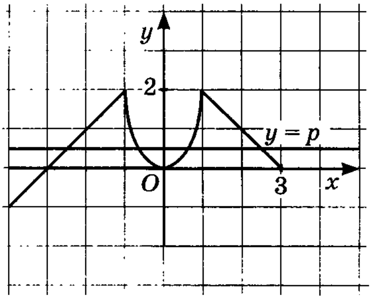

Рис. 8

Решение. График функции представлен на рисунке 8. Если в той же координатной плоскости провести прямую $y = p$, то заметим, что уравнение $f(x) = p$ не имеет корней при $p < -1$ и при $p > 2$, поскольку для заданной кусочной функции $E(f) = [-1; 2]$. Уравнение имеет один корень при $-1 \leqslant p < 0$, два корня — при $p = 2$, три корня — при $p = 0$, четыре корня — при $0 < p < 2$ (именно этот случай представлен на рис. 8).

Это одна из первых задач с параметром. Естественно, слово «параметр» можно пока не использовать, да и вообще не акцентировать на этом внимание учащихся. Линия параметров в нашем учебнике и задачнике прослеживается в довольно мягкой, неакцентированной форме (см., например, **№ 19.57, 22.48—22.53, 23.15—23.19, 25.20, 25.46, 25.47, 28.21—28.23, 29.41—29.47** и т. д.).

17.64. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant -1; \\ -1, \text{ если } -1 < x \leqslant 0; \\ \sqrt{x}, \text{ если } 0 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

а) Найти $f(-2{,}5)$, $f(-0{,}5)$, $f(4)$, $f\left(\sqrt{5} - 3\right)$.

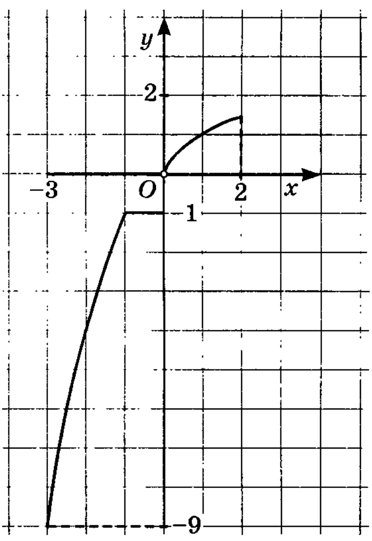

Рис. 9

б) Построить график функции.

Решение. а) Здесь интерес представляет лишь последнее задание: поскольку $-1 < \sqrt{5} - 3 < 0$, получаем, что $f\left(\sqrt{5} - 3\right) = -1$.

б) График функции представлен на рисунке 9.

17.65. Построить график функции:

а) $y = \dfrac{2x^3 + 2x^2}{x + 1}$; б) $y = \dfrac{-0{,}5x^3 + x^2}{x - 2}$.

Решение. а) Сократив дробь (при условии, что $x \neq -1$), получим $y = 2x^2$. Следовательно, графиком заданной функции является парабола $y = 2x^2$ с выколотой точкой $(-1; 2)$.

б) Графиком является парабола $y = -0{,}5x^2$ с выколотой точкой $(2; -2)$.

17.66. Построить график уравнения:

а) $(y - x)(y - x^2) = 0$; в) $(y - 3x^2)(y - 5) = 0$;

б) $(-2x^2 + y)(y + 1) = 0$; г) $(y - 4x^2)(5x^2 + y) = 0$.

Решение. а) Графиком уравнения является объединение двух линий: прямой $y = x$ и параболы $y = x^2$.

б) Графиком уравнения является объединение двух линий: прямой $y = -1$ и параболы $y = 2x^2$.

в) Графиком уравнения является объединение двух линий: прямой $y = 5$ и параболы $y = 3x^2$.

г) Графиком уравнения является объединение двух линий: параболы $y = 4x^2$ и параболы $y = -5x^2$.

18.32. а) Решить графически неравенство $\frac{4}{x} > 2x - 2$.

Решение. О свойствах неравенств речи еще не было, так что даже почленного деления обеих частей неравенства на 2 пока следует избегать. Да и вообще аналитическое решение этого неравенства, сводящееся к знанию формулы корней квадратного уравнения и метода интервалов, учащимся 8 класса неизвестно. Так что графическое решение — единственный приемлемый на этой стадии обучения метод решения. Построив в одной системе координат графики функций $y = \frac{4}{x}$, $y = 2x - 2$ (рис. 10), замеча-

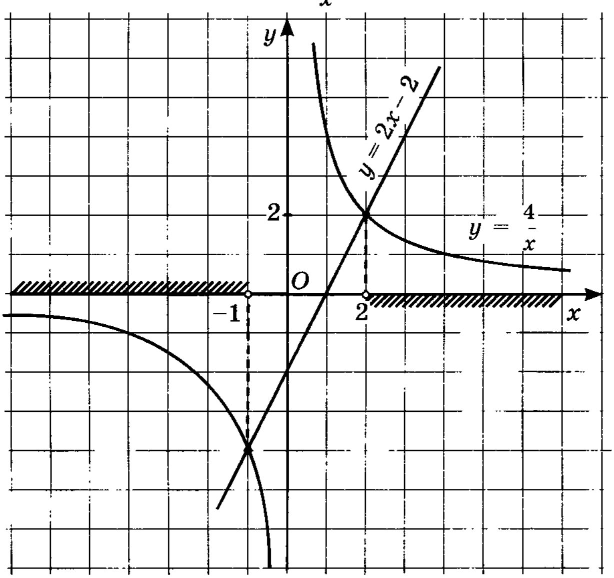

Рис. 10

ем, что ветви гиперболы расположены выше прямой на открытых лучах $(-\infty; -1)$ и $(0; 2)$.

Будь моя воля, я бы не стал записывать в виде $(-\infty;-1) \cup \cup (0; 2)$ и тем более в виде $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 2)$, как рекомендуют во многих методических пособиях. Что значит решить неравенство? Это значит ответить на вопрос, при каких значениях переменной оно обращается в верное числовое неравенство. Запись $x < -1$; $0 < x < 2$ дает более понятный ответ на поставленный вопрос, тогда как запись $(-\infty; -1) \cup (0; 2)$ требует расшифровки. Зачем создавать детям дополнительные трудности?

18.33. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{4}{x}$. Доказать, что

$$f(x + 1) - f(x - 1) = -\frac{1}{2} f(x + 1) \cdot f(x - 1).$$

Решение. Имеем $f(x + 1) = \frac{4}{x+1}$, $f(x - 1) = \frac{4}{x-1}$, значит,

$$f(x + 1) - f(x - 1) = \frac{4}{x+1} - \frac{4}{x-1} = \frac{-8}{(x+1)(x-1)}.$$

С другой стороны,

$$-\frac{1}{2} f(x + 1) \cdot f(x - 1) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x+1} \cdot \frac{4}{x-1} = \frac{-8}{(x+1)(x-1)}.$$

Требуемое соотношение доказано.

Аналогично решаются № **18.34, 18.35.**

18.36. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 0; \\ \sqrt{x}, \text{ если } 0 < x \leqslant 4; \\ \frac{8}{x}, \text{ если } x > 4. \end{cases}$

а) Найти $f(-3)$, $f(1)$, $f\left(\sqrt{33} - 1\right)$.

б) Построить график функции.

Решение. а) Здесь интерес представляет лишь последнее задание. Поскольку $\sqrt{33} - 1 > 4$, получаем:

$$f(\sqrt{33} - 1) = \frac{8}{\sqrt{33} - 1} = \frac{8\left(\sqrt{33} + 1\right)}{\left(\sqrt{33} - 1\right)\left(\sqrt{33} + 1\right)} = \frac{8\left(\sqrt{33} + 1\right)}{33 - 1} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{33} + 1\right).$$

б) График функции представлен на рисунке 11.

18.37. г) Построить график функции $y = \dfrac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2 + 2x}$.

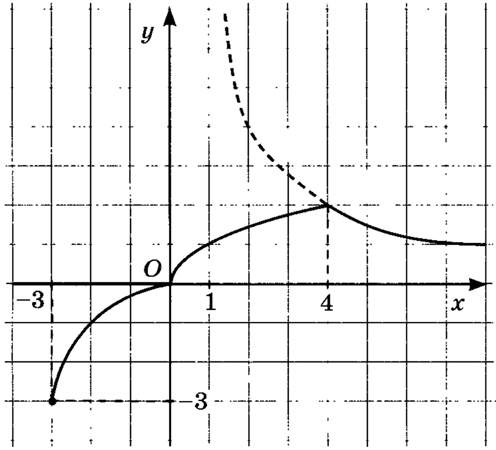

Рис. 11

Решение. $\dfrac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+2x}=\dfrac{-\frac{1}{3}(x+2)}{x(x+2)}=\dfrac{-\frac{1}{3}}{x}$. Значит, речь идет о построении графика функции $y=\dfrac{-\frac{1}{3}}{x}$, $x\neq-2$; это — гипербола с выколотой точкой (рис. 12).

19.50. Решить графически уравнение:

а) $\sqrt{x^2-4x+4}=-2(x-2)^2$;

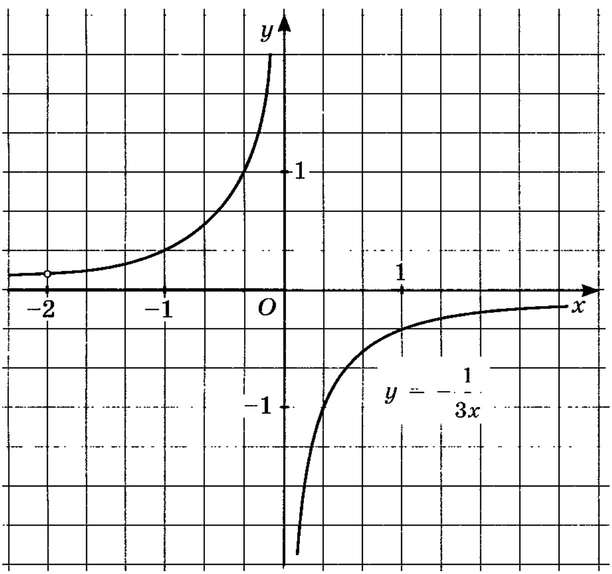

Рис. 12

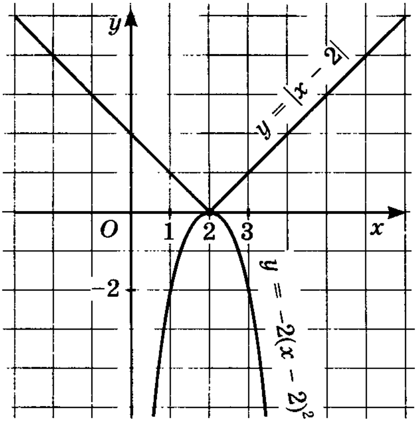

Рис. 13

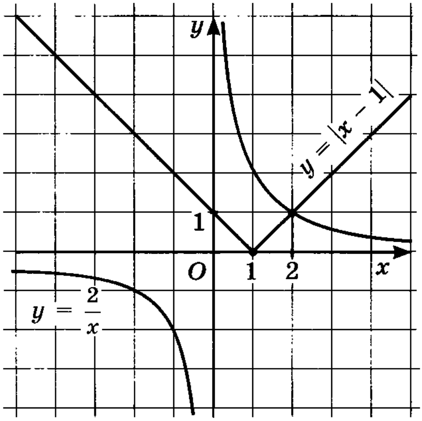

Рис. 14

б) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{2}{x}$;

в) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = (x + 3)^2$;

г) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = -x$.

Решение. а) Имеем

$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x - 2|$.

Построив графики функций $y = |x - 2|$ и $y = -2(x - 2)^2$, замечаем (рис. 13), что у них есть только одна общая точка (2; 0), значит, заданное уравнение имеет единственный корень $x = 2$.

Графическое решение уравнений б) — г) представлено на рисунках 14—16. Напомним, что графические иллюстрации позволяют

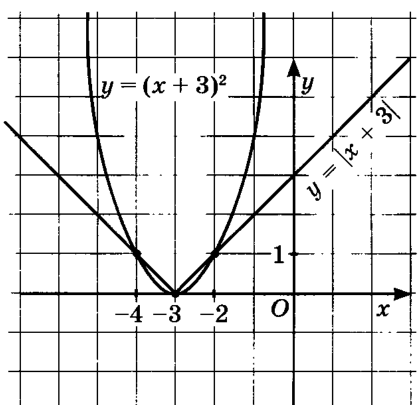

Рис. 15

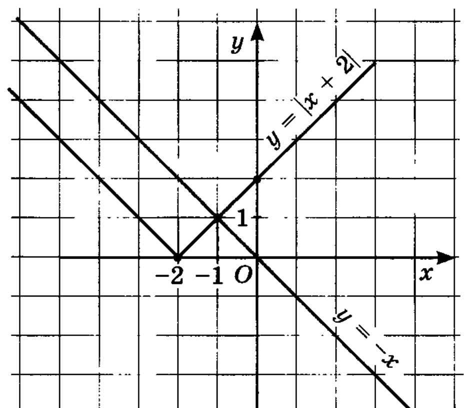

Рис. 16

лишь высказать гипотезу о корнях уравнения, а подтверждается эта гипотеза подстановкой найденных абсцисс точек пересечения графиков в исходное уравнение.

Ответ: а), б) 2; в) −4, −3, −2; г) −1.

19.57. Построить график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2(x-1)^2, \text{ если } 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

С помощью графика определить, при каких значениях p уравнение $f(x) = p$ имеет один корень, два корня.

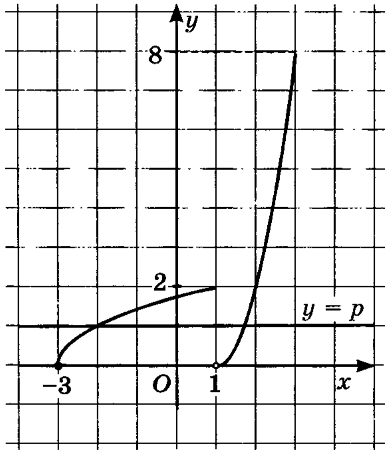

Рис. 17

Решение. График функции представлен на рисунке 17. Если в той же координатной плоскости провести прямую $y = p$, то заметим, что уравнение имеет один корень при $p = 0$ и при $2 < p \leqslant 8$, два корня — при $0 < p \leqslant 2$ (именно этот случай представлен на рисунке 17). Полезно также отметить, что при $p < 0$ и при $p > 8$ корней нет.

19.58. в) Построить график функции $y = \frac{|1-x|}{x-1}(x-4)^2$.

Решение. Если $x < 1$, то $|1 - x| = 1 - x$ и заданная функция принимает вид $y = -(x - 4)^2$. Если $x > 1$, то $|1 - x| = -(1 - x)$ и заданная функция принимает вид $y = (x - 4)^2$. Таким образом, речь фактически идет о построении графика кусочной функции

$$y = \begin{cases} (x-4)^2, \text{ если } x > 1; \\ -(x-4)^2, \text{ если } x < 1. \end{cases}$$

20.40. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ если } -5 \leqslant x \leqslant -3; \\ |x| - 1, \text{ если } -3 < x < 1; \\ \sqrt{x-1}, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$

а) Найти $f(-5)$, $f(1)$, $f(2)$, $f\left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right)$.

б) Построить график функции.

Решение. а) Здесь интерес представляет лишь последнее задание. Поскольку $\frac{\pi^2}{4} + 1 \in [1;\ 5]$, получаем:

$$f\left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right) = \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right) - 1} = \frac{\pi}{2}.$$

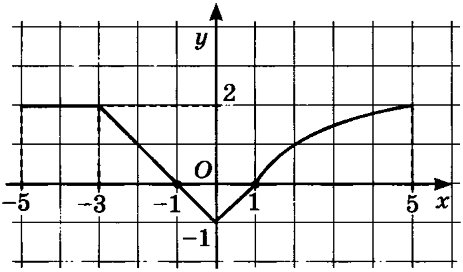

Рис. 18

б) График функции представлен на рисунке 18. Здесь существенно то, что используются оба вида параллельного переноса: и по оси абсцисс, и по оси ординат.

20.41. Построить график функции: а) $y = \sqrt{-x} - 1$; б) $y = -\sqrt{-x} + 1$.

Решение. Выше в **№ 13.32** были построены графики функций $y = \sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$; предлагаемые графики получаются из них параллельным переносом (рис. 19, 20).

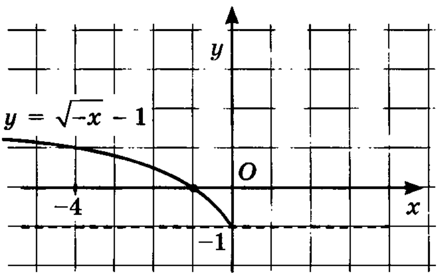

Рис. 19

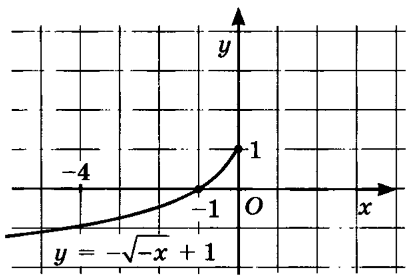

Рис. 20

22.39. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. При каком значении аргумента выполняется равенство $f(2x + 3) = 4f(x - 2)$?

Решение. $f(2x + 3) = -(2x + 3)^2 + 4(2x + 3) - 3 = -4x^2 - 4x$; $f(x - 2) = -(x - 2)^2 + 4(x - 2) - 3 = -x^2 + 8x - 15$.

Решив уравнение $4(-x^2 + 8x - 15) = -4x^2 - 4x$, находим: $x = \frac{5}{3}$.
Аналогично решается **№ 22.38.**

22.47. б) Решить неравенство $-x^2 + 6x - 3 > \frac{6}{x - 2}$.

Решение. На рисунке 21 представлен график функции $y = -x^2 + 6x - 3$, т. е. $y = -(x - 3)^2 + 6$. На рисунке 22 представлен график функции $y = \frac{6}{x - 2}$. Поместив их в одной системе координат (рис. 23), замечаем, что парабола располагается выше гиперболы на интервале $(0; 2)$ и на интервале $(3; 5)$. Значит, решения заданного неравенства таковы: $0 < x < 2$; $3 < x < 5$.

22.48. При каком значении a прямая $x = 2$ будет осью симметрии параболы $y = ax^2 - (a + 6)x + 9$?

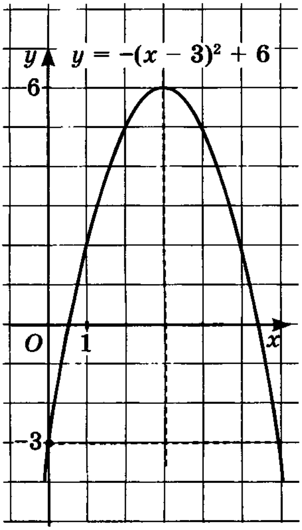

Рис. 21

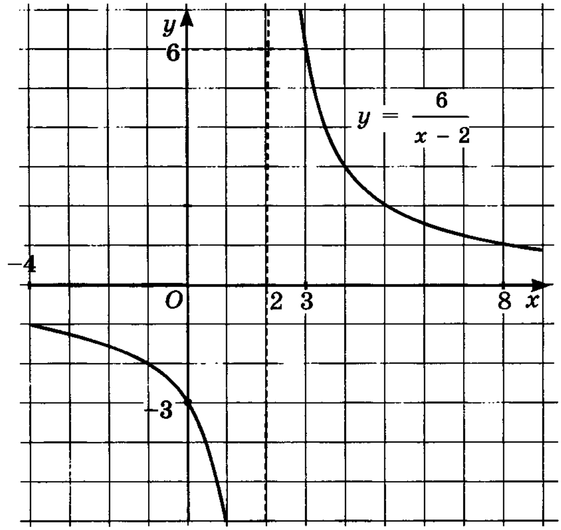

Рис. 22

Решение. Составим уравнение оси параболы: $x = -\dfrac{-(a + 6)}{2a}$.

Из уравнения $\dfrac{a + 6}{2a} = 2$ находим: $a = 2$.

22.49. При каком значении c вершина параболы $y = x^2 + 6x + c$ находится на расстоянии 5 от начала координат?

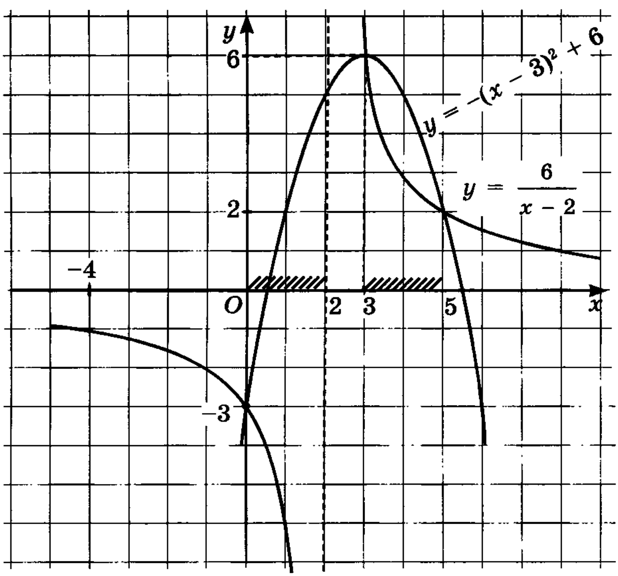

Рис. 23

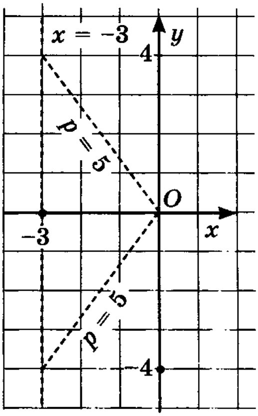

Рис. 24

Решение. Осью симметрии параболы является прямая $x = -3$ (рис. 24), следовательно, вершиной параболы должна служить либо точка $(-3; -4)$, либо точка $(-3; 4)$. В первом случае имеем $y = (x + 3)^2 - 4$, т. е. $y = x^2 + 6x + 5$; во втором случае имеем $y = (x + 3)^2 + 4$, т. е. $y = x^2 + 6x + 13$.

Ответ: $c = 5$ или $c = 13$.

22.50. При каких значениях коэффициентов b и c точка A $(1; -2)$ является вершиной параболы $y = x^2 + bx + c$?

Решение. Так как абсцисса вершины параболы равна 1, то осью параболы является прямая $x = 1$. Значит, $-\frac{b}{2} = 1$, т. е. $b = -2$.

Подставив в формулу $y = x^2 - 2x + c$ координаты точки A, получим $-2 = 1 - 2 + c$, откуда находим, что $c = -1$.

Ответ: $b = -2$, $c = -1$.

22.51. Найти значения коэффициентов a, b, c, если известно, что точка A $(1; -2)$ является вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$ и что парабола пересекает ось ординат в точке B $(0; 2)$.

Решение. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось y в точке $(0; c)$, следовательно, $c = 2$. Осью параболы является прямая $x = -\frac{b}{2a}$, значит, $-\frac{b}{2a} = 1$, т. е. $b = -2a$. Таким образом, уравнение параболы можно записать в виде $y = ax^2 - 2ax + 2$. Подставив в это уравнение координаты точки A, получим: $-2 = a - 2a + 2$, откуда $a = 4$.

Ответ: $a = 4$, $b = -8$, $c = 2$.

22.53. Найти значения коэффициентов b и c, если известно, что парабола $y = x^2 + bx + c$ проходит через точки $(1; 6)$ и $(-1; -2)$.

Решение. Подставив координаты заданных точек в уравнение параболы, получим:

$$\begin{cases} 1 + b + c = 6, \\ 1 - b + c = -2. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим, что $c = 1$, $b = 4$.

22.55. График какой квадратичной функции проходит через точки A $(2; 3)$, B $(0; 1)$, C $(3; 2)$?

Решение. Поскольку парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось y в точке B (0; 1), то $c = 1$. Подставив в уравнение $y = ax^2 + bx + 1$ координаты точек A и C, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4a + 2b + 1 = 3, \\ 9a + 3b + 1 = 2. \end{cases}$$

Из этой системы находим $a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{7}{3}$.

Ответ: $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1$.

25.45[1]. б) Решить уравнение $x^2 + \left(\sqrt{x-2}\right)^2 - 4 = 0$.

Решение. Имеем $x^2 + x - 2 - 4 = 0$, т. е. $x^2 + x - 6 = 0$, откуда получаем $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. При втором значении подкоренное выражение становится отрицательным, т. е. это посторонний корень.

Ответ: 2.

25.47. Доказать, что не существует такого значения параметра p, при котором уравнение $x^2 - px + p - 2 = 0$ имеет только один корень.

Решение. Найдем дискриминант $D = p^2 - 4p + 8$. Приравняв D нулю, получим уравнение $p^2 - 4p + 8 = 0$, которое не имеет корней. Значит, нет таких значений параметра p, при которых $D = 0$, а в данном случае это единственная возможность существования у уравнения единственного корня.

26.20. а) Решить уравнение

$$\frac{8}{16x^2 - 9} - \frac{8}{16x^2 - 24x + 9} = \frac{1}{4x^2 + 3x}.$$

Решение. $\frac{8}{(4x-3)(4x+3)} - \frac{8}{(4x-3)^2} = \frac{1}{x(4x+3)}$;

$$8x(4x - 3) - 8x(4x + 3) = (4x - 3)^2;$$

$$16x^2 + 24x + 9 = 0;$$

$$(4x + 3)^2 = 0;$$

$$x = -\frac{3}{4}.$$

Проверка. ОДЗ: $x \neq 0$, $\pm\frac{3}{4}$. Значит, найденный корень является посторонним, корней у заданного уравнения нет.

---

[1] В издании 2008 г. в № 25.45 б) и г) допущены опечатки: должен быть квадрат корня, а не корень из квадрата.

26.21. а) Решить уравнение

$$\frac{x+1}{x^3-3x^2+x-3}+\frac{1}{x^4-1}=\frac{x-2}{x^3-3x^2-x+3}.$$

Решение. $\dfrac{x+1}{(x^2+1)(x-3)}+\dfrac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{x-2}{(x^2-1)(x-3)}$;

$$(x+1)(x^2-1)+(x-3)=(x-2)x^2+1;$$

$$3x^2-x-2=0;$$

$$x_1=1;\ x_2=-\frac{2}{3}.$$

Проверка. ОДЗ: $x\neq 3, \pm 1$. Значит, первый корень является посторонним.

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

26.26. Решить уравнение:

в) $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$;

г) $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0.$

Решение. в) $(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+6)=1$; есть смысл ввести новую переменную $y=x^2-5x+7$. Получим: $y^2-(y-1)=1$, откуда $y_1=0$, $y_2=1$. Осталось решить два уравнения: $x^2-5x+7=0$; $x^2-5x+7=1$.

г) Введя новую переменную $x=\dfrac{x^2+x-5}{x}$, придем к уравнению $y+\dfrac{3}{y}+4=0$, откуда $y_1=-3$, $y_2=-1$.

Осталось решить два уравнения: $\dfrac{x^2+x-5}{x}=-3$, $\dfrac{x^2+x-5}{x}=-1$.

Ответ: в) 2,3; г) 1, -5, $-1\pm\sqrt{6}$.

26.27. г) Решить уравнение $\dfrac{1}{x^2-3x+3}+\dfrac{2}{x^2-3x+4}=\dfrac{6}{x^2-3x+5}$.

Решение. Введя новую переменную $y=x^2-3x+4$, придем к уравнению $\dfrac{1}{y-1}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{6}{y+1}$, откуда $y_1=2$, $y_2=\dfrac{1}{3}$. Осталось решить два уравнения: $x^2-3x+4=2$, $x^2-3x+4=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: 1, 2.

26.28. Решить уравнение:

а) $x(x-1)(x-2)(x-3)=15$;

б) $x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}=4$.

Решение. а) Имеем:

$$(x(x-3))((x-1)(x-2)) = 15;$$
$$(x^2-3x)(x^2-3x+2) = 15.$$

Теперь «проявилась» подстановка $y = x^2 - 3x$, которая преобразует уравнение к виду $y(y+2) = 15$, т. е. $y^2 + 2y - 15 = 0$. Получаем: $y_1 = 3$, $y_2 = -5$. Задача свелась к решению двух квадратных уравнений: $x^2 - 3x = 3$; $x^2 - 3x = -5$. Из первого уравнения находим

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2};$$

второе уравнение не имеет корней.

б) Положим $y = x + \frac{1}{x}$, тогда $y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, т. е. $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

В итоге относительно новой переменной уравнение принимает вид $y^2 - 2 + y = 4$, т. е. $y^2 + y - 6 = 0$. Получаем: $y_1 = 2$, $y_2 = -3$. Остается решить уравнения: $x + \frac{1}{x} = 2$ и $x + \frac{1}{x} = -3$.

Ответ: 1, $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

27.42. Расстояние между городами равно 44 км. Из этих городов навстречу друг другу выходят одновременно два пешехода и встречаются через 4 ч. Если бы первый вышел на 44 мин раньше второго, то их встреча произошла бы в середине пути. С какой скоростью идет каждый пешеход?

Решение. 1. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — скорость первого пешехода. Поскольку расстояние 44 км пешеходы, идя навстречу друг другу, преодолевают за 4 ч, то за 1 ч встречного движения они пройдут 11 км — это их суммарная скорость. Значит, $(11 - x)$ км/ч — скорость второго пешехода.

Половину пути, т. е. 22 км, первый проходит на 44 мин медленнее второго. Значит, получаем уравнение $\frac{22}{x} - \frac{22}{11-x} = \frac{44}{60}$.

2. *Работа с составленной моделью.*

Выполнив соответствующие преобразования уравнения, получим $x^2 - 71x + 330 = 0$, откуда находим $x_1 = 66$, $x_2 = 5$ (полученное квадратное уравнение красиво решается устно, так что, может быть, есть смысл предложить эту задачу учащимся позднее, после изучения § 29 «Теорема Виета»).

3. *Ответ на вопрос задачи.*

Из найденных двух значений первое явно не подходит по смыслу: не может скорость пешехода равняться 66 км/ч. Значит, скорость первого пешехода равна 5 км/ч и, соответственно, скорость второго — 6 км/ч.

27.43. Велосипедист проехал 96 км на 2 ч быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 км больше, чем предполагал проезжать за 1 ч 15 мин. С какой скоростью ехал велосипедист?

Решение. 1. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — запланированная скорость велосипедиста. С этой скоростью за 1 ч 15 мин он проехал бы $\frac{5x}{4}$ км. На самом деле за 1 ч он проехал $\left(\frac{5x}{4}+1\right)$ км. Таким образом, ехал он со скоростью $\frac{5x+4}{4}$ км/ч и с этой скоростью преодолел расстояние 96 км на 2 ч быстрее, чем если бы ехал с запланированной скоростью x км/ч. Значит, получаем уравнение $\frac{96}{x}-\frac{96\cdot 4}{5x+4}=2$.

2. *Работа с составленной моделью.*

Выполнив соответствующие преобразования уравнения, получим $x_1 = 12$, $x_2 = -\frac{16}{5}$.

3. *Ответ на вопрос задачи.*

Из найденных двух значений второе явно не подходит по смыслу: не может скорость велосипедиста быть отрицательной. Но в задаче спрашивается, с какой скоростью ехал велосипедист на самом деле. Эта скорость, как мы видели выше, такова: $\frac{5x+4}{4}$ км/ч. Подставив в это выражение найденное значение $x = 12$, получим значение фактической скорости велосипедиста: 16 км/ч.

27.44. В сплав золота с серебром, содержащий 80 г золота, добавили 100 г золота. В результате содержание золота в сплаве увеличилось на 20 %. Сколько граммов серебра в сплаве?

Решение. 1. *Составление математической модели.*

x г — масса серебра в сплаве;

$(x + 80)$ г — первоначальная масса сплава;

$\frac{80}{x+80}\cdot 100\%$ — процентное содержание золота в первоначальном сплаве;

$(x + 180)$ г — масса полученного сплава;

$\frac{180}{x+180} \cdot 100\%$ — процентное содержание золота в полученном сплаве.

Исходя из условий задачи составляем уравнение

$$\frac{180}{x+180} \cdot 100 - \frac{80}{x+80} \cdot 100 = 20.$$

2. *Работа с составленной моделью.*

Выполнив соответствующие преобразования уравнения, получим: $x^2 - 240x + 14400 = 0$; $(x - 120)^2 = 0$; $x = 120$.

3. *Ответ на вопрос задачи.*

Серебра в сплаве 120 г.

27.45. В сплав меди и цинка, содержащий 5 кг цинка, добавили 15 кг цинка, после чего содержание цинка в сплаве повысилось на 30%. Какова первоначальная масса сплава, если известно, что меди в нем было больше, чем цинка?

Решение. 1. *Составление математической модели.*

x кг меди было в сплаве;

$(x + 5)$ кг — масса первоначального сплава;

$\frac{5}{x+5} \cdot 100\%$ — первоначальное процентное содержание цинка;

$\frac{20}{x+20} \cdot 100\%$ — процентное содержание цинка в полученном сплаве.

Согласно условию

$$\frac{20}{x+20} \cdot 100 - \frac{5}{x+5} \cdot 100 = 30.$$

2. *Работа с составленной моделью.*

Решив полученное уравнение, находим $x_1 = 20$, $x_2 = 5$. Оба корня удовлетворяют составленному уравнению (*проверка по модели*).

3. *Ответ на вопрос задачи.*

По условию в первоначальном сплаве было 5 кг цинка, а меди — больше, чем цинка. Поэтому из найденных двух значений выбираем первое: $x = 20$. Тогда масса сплава — 25 кг.

Ответ: 25 кг.

28.23. Решить уравнение:

а) $(p - 4)x^2 + (2p - 4)x + p = 0$;

б) $px^2 + 2(p + 1)x + p + 3 = 0$.

Решение. а) Если $p = 4$, то уравнение принимает вид $4x + 4 = 0$, откуда получим $x = -1$.

Если $p \neq 4$, то, применяя формулу корней квадратного уравнения, находим:

$$x_1 = -1,\ x_2 = \frac{p}{4-p}.$$

б) Если $p = 0$, то уравнение принимает вид $2x + 3 = 0$, откуда получим $x = -1{,}5$. Если же $p \neq 0$, то, применяя формулу корней квадратного уравнения, находим:

$$x_{1,2} = \frac{-(p+1) \pm \sqrt{1-p}}{p}.$$

Анализируя эту формулу, делаем вывод: если $p > 1$, то уравнение не имеет корней; если $p = 1$, то уравнение имеет единственный корень $x = -2$; если $p < 1$ (но $p \neq 0$), то уравнение имеет указанные выше два корня.

Замечание. Упомянем достаточно популярную и, как правило, трудную для учащихся модификацию примера б): при каких значениях параметра p уравнение имеет один корень? Учитывать приходится не только случай, когда дискриминант квадратного уравнения обращается в нуль, но и случай обращения в нуль старшего коэффициента — при этом уравнение превращается в линейное.

29.39. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - 9x - 17 = 0$. Не решая уравнения, вычислить:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$.

Решение. а) В § 29 учебника доказано, что если x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$. Значит, для заданного уравнения получаем: $x_1^2 + x_2^2 = (-9)^2 - 2 \cdot (-17) = 115$.

б) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = (-17) \cdot 9 = -153$.

Следует обратить внимание учащихся на то, что в подобных задачах могут встречаться некорректные задания. Например, если бы исходным было уравнение $x^2 - 9x + 21 = 0$, то предложенное задание было бы лишено смысла, поскольку это уравнение не имеет действительных корней. У заданного же уравнения дискриминант положителен, значит, два действительных корня на самом деле существуют.

29.41. Дано уравнение $x^2 - (2p^2 - p - 6)x + (8p - 1) = 0$. Известно, что сумма его корней равна -5. Найти значение параметра p.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = 2p^2 - p - 6$. Следовательно, задача сводится к решению уравнения $2p^2 - p - 6 = -5$, откуда находим: $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$.

Но ошибочно думать, что мы уже получили ответ на вопрос задачи. Надо еще убедиться в том, что при найденном значении параметра квадратное уравнение имеет корни. Так, в нашем примере при $p = 1$ получаем уравнение $x^2 + 5x + 7 = 0$. Это уравнение не имеет корней (значит, бессмысленно говорить о том, что сумма корней равна -5). Если же $p = -\frac{1}{2}$, то $x^2 + 5x - 5 = 0$. Это уравнение имеет два корня, сумма которых равна -5.

Ответ: $p = -\frac{1}{2}$.

Аналогично решается № 29.42.

29.43. При некотором значении параметра p корни квадратного уравнения $2px^2 + (p^2 - 9)x - 5p + 2 = 0$ являются противоположными числами. Найти эти корни.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни заданного уравнения. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{p^2 - 9}{2p}$. По условию x_1, x_2 — противоположные числа, значит, $x_1 + x_2 = 0$. Таким образом, приходим к уравнению $-\frac{p^2 - 9}{2p} = 0$, откуда получаем: $p = \pm 3$. При $p = -3$ заданное уравнение принимает вид $-6x^2 + 17 = 0$, откуда находим: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{17}{6}}$. При $p = 3$ заданное уравнение принимает вид $6x^2 - 13 = 0$, откуда находим: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{13}{6}}$.

29.44. При некотором значении параметра p корни квадратного уравнения $2px^2 + 5x + p + 1 = 0$ являются взаимно обратными числами. Найти эти корни.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни заданного уравнения. По теореме Виета $x_1x_2 = \frac{p + 1}{2p}$. По условию x_1, x_2 — взаимно обратные числа, значит, $x_1x_2 = 1$. Таким образом, приходим к уравнению $\frac{p + 1}{2p} = 1$, откуда получаем: $p = 1$. При $p = 1$ заданное уравнение принимает вид $2x^2 + 5x + 2 = 0$, откуда находим $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Замечание. Чуть-чуть изменим заданное уравнение — пусть оно имеет вид $2px^2 + 5x + p + 3 = 0$. Проведя рассуждения, аналогичные тем, что сделаны выше, придем к уравнению $\frac{p+3}{2p} = 1$, откуда получаем $p = 3$. При $p = 3$ заданное уравнение принимает вид $6x^2 + 5x + 6 = 0$; это уравнение корней не имеет, значит, предложенное задание некорректно: нельзя найти то, чего нет. Поэтому еще раз обращаем ваше внимание: во всей серии упражнений **№ 29.39—29.47** и в других подобных случаях следует всегда проверять, имеет ли квадратное уравнение, о котором идет речь, корни.

29.45. Дано уравнение $x^2 + (3p - 5)x + (3p^2 - 11p - 6) = 0$. Известно, что сумма квадратов его корней равна 65. Найти значение параметра p и корни уравнения.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни заданного уравнения. Снова, как в **№ 29.39**, воспользуемся тем, что если x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$. Значит, для заданного уравнения получаем: $x_1^2 + x_2^2 = (3p - 5)^2 - 2(3p^2 - 11p - 6) = 65$, откуда находим: $p_1 = -2$, $p_2 = \frac{14}{3}$. При $p = -2$ заданное уравнение принимает вид $x^2 - 11x + 28 = 0$, откуда находим: $x_1 = 4$, $x_2 = 7$; при $p = \frac{14}{3}$ заданное уравнение принимает вид $x^2 + 9x + 8 = 0$, откуда находим: $x_3 = -1$, $x_4 = -8$.

29.46. Разность корней уравнения $2x^2 - 15x + p = 0$ равна 2,5. Найти значение параметра p и корни уравнения.

Решение. Имеем:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2{,}5, \\ x_1 + x_2 = 7{,}5. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $x_1 = 5$; $x_2 = 2{,}5$; $\frac{p}{2} = x_1x_2 = 12{,}5$, т. е. $p = 25$.

29.47. Один из корней уравнения $2x^2 - 14x + p = 0$ больше другого в 2,5 раза. Найти значение параметра p и корни уравнения.

Решение. Пусть a и $2{,}5a$ — корни заданного уравнения. По теореме Виета $a + 2{,}5a = -\frac{-14}{2}$, откуда находим $a = 2$. Значит, корни уравнения 2 и 5, их произведение равно 10, а по теореме Виета для заданного уравнения оно равно $\frac{p}{2}$. Итак, $\frac{p}{2} = 10$, $p = 20$.

29.49. а) Упростить выражение $\left(\frac{4}{5a^2 + a - 4} - \frac{a + 1}{9(5a - 4)}\right) \cdot \frac{15a - 12}{a + 7}$.

Решение. 1) $5a^2 + a - 4 = (a + 1)(5a - 4)$;

2) $\frac{4}{(a + 1)(5a - 4)} - \frac{a + 1}{9(5a - 4)} = \frac{36 - (a + 1)^2}{9(a + 1)(5a - 4)} =$

$= \frac{(6 - a - 1)(6 + a + 1)}{9(a + 1)(5a - 4)} = \frac{(5 - a)(7 + a)}{9(a + 1)(5a - 4)}$;

3) $\frac{(5 - a)(7 + a)}{9(a + 1)(5a - 4)} \cdot \frac{3(5a - 4)}{a + 7} = \frac{5 - a}{3(a + 1)}$.

29.51. а) Решить уравнение $\frac{x^2}{x^2 - 7x + 10} + \frac{16}{3x^2 - 12} = 1$.

Решение. $\frac{x^2}{(x - 2)(x - 5)} + \frac{16}{3(x - 2)(x + 2)} = 1$;

$$3x^2(x + 2) + 16(x - 5) = 3(x - 5)(x^2 - 4);$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{10}{3}.$$

Проверка. ОДЗ: $x \neq 5, \pm 2$. Значит, найденный корень 2 является посторонним.

Ответ: $-\frac{10}{3}$.

29.54. Решить уравнение:

а) $\frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3} + \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4x - 1}{2x^2 - 6x - 8}$;

б) $\frac{2}{2x^2 - x - 1} + \frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{3x + 1}{3x^2 - 3}$.

Решение. а) Имеем:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1);$$

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2);$$

$$2x^2 - 6x - 8 = 2(x - 4)(x + 1).$$

Заданное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x - 1}{(x - 3)(x + 1)} + \frac{x + 3}{(x - 4)(x + 2)} = \frac{4x - 1}{2(x - 4)(x + 1)}.$$

После понятных преобразований получим $x^2 - 7x - 8 = 0$, откуда находим: $x_1 = -1$, $x_2 = 8$. Первое из найденных значений является посторонним корнем (обращает в нуль знаменатели первой и третьей дробей).

б) $\dfrac{2}{(2x+1)(x-1)} + \dfrac{x}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{3x+1}{3(x-1)(x+1)}$;

$$6(x+1)(x-2) + 3x(2x+1)(x-1) = (3x+1)(2x+1)(x-2);$$

$$10x^2 = 10;$$

$$x = \pm 1.$$

Проверка. ОДЗ: $x \neq 2,\ -\frac{1}{2},\ \pm 1$. Значит, найденные корни являются посторонними.

Ответ: а) 8; б) нет корней.

30.23. Решить уравнение:

а) $\left(x^2+1\right) + 2\sqrt{x^2+1} = 15$;

г) $\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}-4} = \dfrac{\sqrt{x-1}-6}{\sqrt{x-1}-7}$.

Решение. а) Положив $y = \sqrt{x^2+1}$, придем к уравнению $y^2 + 2y = 15$, откуда находим: $y_1 = 3$, $y_2 = -5$. Остается решить два уравнения: $\sqrt{x^2+1} = 3$, $\sqrt{x^2+1} = -5$. Из первого находим $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$, второе уравнение корней не имеет.

г) Положив $y = \sqrt{x-1}$, придем к уравнению $\dfrac{y-2}{y-4} = \dfrac{y-6}{y-7}$, откуда находим $y = 10$. Остается решить уравнение $\sqrt{x-1} = 10$; получаем $x = 101$.

30.24. г) Решить уравнение $4\sqrt{3-\dfrac{1}{x}} - \sqrt{\dfrac{x}{3x-1}} = 3$.

Решение. Поскольку $3 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x-1}{x}$, есть смысл ввести новую переменную $y = \sqrt{\dfrac{3x-1}{x}}$. Тогда заданное уравнение примет вид $4y - \dfrac{1}{y} = 3$, откуда находим: $y_1 = 1$, $y_2 = -0{,}25$. Значит, либо $\sqrt{\dfrac{3x-1}{x}} = 1$, $x = 0{,}5$, либо $\sqrt{\dfrac{3x-1}{x}} = -0{,}25$ — это уравнение корней не имеет.

Ответ: 0,5.

31.51. Сравнить числа a и b, если:

а) $a = \sqrt{37} - \sqrt{14}$, $b = 6 - \sqrt{15}$; б) $a = \sqrt{11} - \sqrt{10}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{5}$.

Решение. а) **I способ.** Рассмотрим квадраты сравниваемых чисел:

$$a^2 = \left(\sqrt{37} - \sqrt{14}\right)^2 = 51 - 2\sqrt{518};$$

$$b^2 = \left(6 - \sqrt{15}\right)^2 = 51 - 2\sqrt{540}.$$

Отмечаем, что $a^2 > b^2$; поскольку a и b — положительные числа, делаем вывод: $a > b$.

II способ. Имеем $\sqrt{37} > 6$, а $-\sqrt{14} > -\sqrt{15}$. Сложив эти два неравенства одинакового смысла, получим $a > b$.

б) График функции $y = \sqrt{x}$ удаляется от оси x тем медленнее, чем больше x. Интуиция подсказывает, что на отрезке от 5 до 6 ординаты точек графика быстрее изменяются, чем на отрезке от 10 до 11. Поэтому можно предположить, что $a < b$, т. е.

$$\sqrt{11} - \sqrt{10} < \sqrt{6} - \sqrt{5}.$$

Далее последовательно получаем:

$$\left(\sqrt{11} - \sqrt{10}\right)^2 < \left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)^2;$$

$$21 - 2\sqrt{110} < 11 - 2\sqrt{30};$$

$$5 + \sqrt{30} < \sqrt{110};$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{6} < \sqrt{22}$$

(обе части предыдущего неравенства разделили на $\sqrt{5}$);

$$\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)^2 < \left(\sqrt{22}\right)^2;$$

$$11 + 2\sqrt{30} < 22;$$

$$2\sqrt{30} < 11;$$

$$\sqrt{120} < 11.$$

Получили верное неравенство, подтверждающее нашу догадку о том, что $a < b$. Осуществляя преобразования в обратном порядке, придем к неравенству $\sqrt{11} - \sqrt{10} < \sqrt{6} - \sqrt{5}$.

31.57. Верно ли, что:

а) если $\dfrac{2}{a-3} > 1$, то $3 < a < 5$;

б) если $\dfrac{1}{a-2} < 1$, то $a > 3$?

Решение. а) Из условия сразу следует, что $a - 3 > 0$, т. е. $a > 3$. Это позволяет умножить обе части исходного неравенства на $a - 3$, получим $2 > a - 3$, откуда $a < 5$. Утверждение верно.

б) Заданному неравенству удовлетворяют любые значения $a < 2$, т. е. сформулированное утверждение неверно.

31.58. Доказать неравенство $\frac{5a}{3b} + \frac{12b}{5a} \geqslant 4$, если известно, что a и b — числа одного знака.

Решение. $\frac{5a}{3b} + \frac{12b}{5a} - 4 = \frac{25a^2 - 60ab + 36b^2}{15ab} = \frac{(5a - 6b)^2}{15ab} \geqslant 0$.

31.59. а) Доказать неравенство $a^2 + 2b^2 + 2ab + 2b + 2 > 0$.

Решение. $a^2 + 2b^2 + 2ab + 2b + 2 = (a + b)^2 + (b + 1)^2 + 1 > 0$.

31.60. Доказать неравенство:

а) $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b + c)$; б) $(x^2 - y^2)^2 \geqslant 4xy(x - y)^2$.

Решение. а) $2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b + c) = (a - b)^2 + (a - c)^2 \geqslant 0$.

б) $(x^2 - y^2)^2 - 4xy(x - y)^2 = (x - y)^2((x + y)^2 - 4xy) = (x - y)^2 \times$ $\times (x - y)^2 = (x - y)^4 \geqslant 0$.

31.61. Доказать неравенство $a^3 + 1 \geqslant a^2 + a$, если $a \geqslant -1$.

Решение.

$a^3 + 1 - (a^2 + a) = (a + 1)(a^2 - a + 1 - a) = (a + 1)(a - 1)^2$.

Полученное выражение неотрицательно при $a \geqslant -1$.

31.64. Доказать неравенство $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$, если a, b, c, d — неотрицательные числа.

Решение. Предположим противное — что существует такая четверка неотрицательных чисел a, b, c, d, для которой выполняется неравенство

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Тогда, используя свойства числовых неравенств, последовательно находим:

$$\left(\sqrt{(a + c)(b + d)}\right)^2 < \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right)^2;$$

$$(a + c)(b + d) < ab + cd + 2\sqrt{abcd};$$

$$bc + ad - 2\sqrt{abcd} < 0;$$

$$\left(\sqrt{bc} - \sqrt{ad}\right)^2 < 0.$$

Получили противоречие, следовательно, наше предположение неверно, т. е. верным является доказываемое неравенство.

Аналогично решаются **№ 31.62, 31.63, 31.65.**

33.35. Прежде чем разбить лагерь на берегу реки, туристы проплыли по реке и ее притоку 10 км, причем часть пути они проплыли по течению, а часть — против течения. Определить, какое расстояние проплыли туристы по течению, если известно, что в пути они были менее 2 ч, собственная скорость лодки 5 км/ч, а скорость течения реки и ее притока 1 км/ч.

Решение. 1. *Составление математической модели.*

Пусть x км — путь туристов по течению. Тогда $(10 - x)$ км — путь туристов против течения;

$\frac{x}{6}$ ч — время движения туристов по течению;

$\frac{10 - x}{4}$ ч — время движения против течения.

Математической моделью заданной ситуации служит неравенство

$$\frac{x}{6} + \frac{10 - x}{4} < 2.$$

2. *Работа с составленной моделью.*

Решив неравенство, находим, что $x > 6$.

3. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивают, какое расстояние проплыли туристы по течению. Это расстояние мы обозначили x, получили, что $x > 6$. Но весь путь туристов составляет 10 км, значит, по смыслу задачи накладываем ограничение $x < 10$.

Ответ: более 6 км, но менее 10 км.

33.36. Дачники прошли от поселка до станции расстояние 10 км. Сначала они шли со скоростью 4 км/ч, а затем увеличили скорость на 2 км/ч. Какое расстояние они могли пройти со скоростью 4 км/ч, чтобы успеть на поезд, который отправляется со станции через 2 ч после их выхода из поселка?

Решение. 1. *Составление математической модели.*

Пусть x км дачники шли со скоростью 4 км/ч, тогда со скоростью 6 км/ч они должны были идти $(10 - x)$ км. Значит, на весь путь они затратят $\left(\frac{x}{4} + \frac{10 - x}{6}\right)$ ч.

По условию это время не должно превышать 2 ч. В итоге получаем неравенство

$$\frac{x}{4} + \frac{10 - x}{6} \leqslant 2.$$

2. *Работа с составленной моделью.*

Решив неравенство, получим $x \leqslant 4$.

3. *Ответ на вопрос задачи.*

Со скоростью 4 км/ч дачники могут идти не более 4 км.

33.37. Чтобы попасть из поселка A в поселок B, нужно доехать по шоссе до пункта C, а затем свернуть на проселочную дорогу. Путь от A до C на 15 км длиннее, чем путь от C до B. Скорость мотоциклиста по шоссе 50 км/ч, а по проселочной дороге 40 км/ч, причем на весь путь от A до B он тратит менее 3 ч. Чему равно расстояние от A до C, если известно, что оно выражается целым числом десятков километров?

Решение. 1. *Составление математической модели.*

Пусть x км — расстояние от A до C. Тогда $(x - 15)$ км — расстояние от C до B;

$\frac{x}{50}$ ч — время движения мотоциклиста по шоссе;

$\frac{x-15}{40}$ ч — время движения мотоциклиста по проселку.

Математической моделью заданной ситуации служит неравенство

$$\frac{x}{50} + \frac{x-15}{40} < 3.$$

2. *Работа с составленной моделью.*

Решив неравенство, находим, что $x < 75$.

3. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивают, чему равно расстояние от A до C. Это расстояние мы обозначили буквой x, получили $x < 75$. Но из условия следует, что, во-первых, $x > 15$ (поскольку путь по шоссе на 15 км больше, чем путь по проселочной дороге) и, во вторых, что число x должно быть кратно 10. Следовательно, для x получаем следующие возможности: 20, 30, 40, 50, 60, 70.

Ответ: 20, 30, 40, 50, 60 или 70 км.

33.38. Из города A в город B, находящийся на расстоянии 240 км от A, выехал автобус со скоростью 54 км/ч. Через некоторое время вслед за ним выехал автомобиль со скоростью 90 км/ч. Прибыв в B, автомобиль тотчас повернул обратно. На каком расстоянии от A автобус встретится с автомобилем?

Решение. 1. *Составление математической модели.*

t ч — время движения автобуса до встречи с автомобилем;

$54t$ км — путь автобуса до встречи;

$(480 - 54t)$ км — путь, пройденный автомобилем от момента выезда из A и до встречи с автобусом;

$\dfrac{480 - 54t}{90}$ ч — время движения автомобиля до встречи.

По условию до встречи автобус был в пути большее время (поскольку автомобиль выехал позднее).

Математической моделью заданной ситуации служит неравенство

$$\frac{480 - 54t}{90} < t.$$

2. *Работа с составленной моделью.*
Решив неравенство, находим, что $t > \dfrac{10}{3}$.
3. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивают, какой путь s прошел автобус до встречи с автомобилем. Этот путь выражается формулой $54t$. Но $t > \dfrac{10}{3}$, значит, $54t > 180$. По смыслу задачи этот путь не должен превышать расстояния между A и B, т. е. $s < 240$.

Ответ: более 180 км, но менее 240 км.

34.43. При каких значениях параметра p неравенство $x^2 \leqslant 9p^2$ имеет одно целочисленное решение?

Решение. Получаем $-3p \leqslant x \leqslant 3p$ или $3p \leqslant x \leqslant -3p$. В обоих случаях значение $x = 0$ является целочисленным решением неравенства. Чтобы других целочисленных решений не было, достаточно потребовать, чтобы выполнялось неравенство $|3p| < 1$.

Ответ: $-\dfrac{1}{3} < p < \dfrac{1}{3}$.

34.46. Две группы туристов вышли с турбазы по направлениям, которые образуют прямой угол. Первая группа шла со скоростью 4 км/ч, а вторая — 5 км/ч. Группы поддерживали связь по радио, причем переговариваться можно было на расстоянии не более 13 км. Какое время после выхода второй группы могли поддерживать между собой связь туристы, если известно, что вторая группа вышла на маршрут через 2 ч после первой?

Решение. 1. *Составление математической модели.*
t ч — время движения второй группы туристов;
$5t$ км — путь, пройденный второй группой;
$4(t + 2)$ км — путь, пройденный первой группой.

Математической моделью заданной ситуации (рис. 25) служит неравенство

$$16(t + 2)^2 + 25t^2 \leqslant 13^2.$$

2. *Работа с составленной моделью.*

Решив неравенство, получим

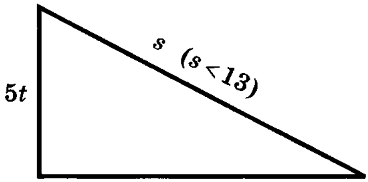

Рис. 25

$$-\frac{105}{41} \leqslant t \leqslant 1.$$

3. *Ответ на вопрос задачи.*

По смыслу задачи переменная t принимает только положительные значения, т. е. соотношение $-\frac{105}{41} \leqslant t$ можно опустить.

Ответ: не более 1 ч.

35.11. Упростить и вычислить с точностью до 0,1:

а) $\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$; б) $\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}$.

Решение.

а) $\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}} = \sqrt{3-\sqrt{9-2\cdot3\cdot2\sqrt{5}+20}} =$

$= \sqrt{3-\sqrt{\left(3-2\sqrt{5}\right)^2}} = \sqrt{3-|3-2\sqrt{5}|} = \sqrt{3+\left(3-2\sqrt{5}\right)} =$

$= \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = |\sqrt{5}-1| = \sqrt{5}-1 \approx 1,2.$

б) $\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}} = \sqrt{5-\sqrt{1+2\cdot1\cdot2\sqrt{3}+12}} = \sqrt{5-\sqrt{\left(1+2\sqrt{3}\right)^2}} =$

$= \sqrt{5-|1+2\sqrt{3}|} = \sqrt{5-\left(1+2\sqrt{3}\right)} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} =$

$= \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1 \approx 0,7.$

36.16. Известно, что порядок числа x равен 6. Каким может быть порядок числа: а) x^2; б) x^5; в) $\sqrt{x}$; г) $\frac{1}{x}$?

Решение. а) Из условия следует, что заданное число можно представить в виде $x = a \cdot 10^6$, где $1 \leqslant a < 10$. Тогда $x^2 = a^2 \cdot 10^{12}$, причем $1 \leqslant a^2 < 100$. Так как порядок числа a^2 равен 0 или 1, то порядок числа x^2 равен 12 или 13.

б) $x^5 = a^5 \cdot 10^{30}$, причем $1 \leqslant a^5 < 10^5$. Порядок числа a^5 равен 0, 1, 2, 3 или 4. Значит, порядок числа x^5 равен 30, 31, 32, 33 или 34.

в) $\sqrt{x} = \sqrt{a}\cdot10^3$. Порядок числа $\sqrt{a}$ равен 0, следовательно, порядок числа $\sqrt{x}$ равен 3.

г) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a \cdot 10^6} = \dfrac{10}{a} \cdot 10^{-7}$. Если число a заключено в пределах от 1 (включая 1) до 10 (не включая 10), то число $\dfrac{10}{a}$ заключено в пределах от 1 (не включая 1) до 10 (включая 10). Значит, порядок числа $\dfrac{10}{a}$ равен 0 или 1. Поэтому порядок числа $\dfrac{1}{x}$ равен -7 или -6.

36.18. Известно, что порядок числа s равен 2, а порядок числа t равен 4. Каким может быть порядок числа: а) st; б) $100s + t$; в) $0{,}01s + t$; г) $0{,}1st$?

Решение. а) $s = a \cdot 10^2$, $t = b \cdot 10^4$, где числа a и b принадлежат промежутку $[1; 10)$. Имеем: $st = ab \cdot 10^6$. Порядок числа ab равен 0 или 1, следовательно, порядок числа $st = ab \cdot 10^6$ равен 6 или 7.

б) $100s + t = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^4 = (a + b) \cdot 10^4$. Порядок числа $a + b$ равен 0 или 1, значит, порядок числа $100s + t$ равен 4 или 5.

в) $0{,}01s + t = 0{,}01a \cdot 10^2 + b \cdot 10^4 = a + b \cdot 10^4 = 10^4(b + a \cdot 10^{-4})$. Как мы видим, к числу b, принадлежащему промежутку $[1; 10)$, прибавляется положительное число $a \cdot 10^{-4}$. Сумма может оказаться немного больше числа 10. Следовательно, порядок этой суммы равен 0 или 1, а порядок числа $0{,}01s + t$ равен 4 или 5.

г) $0{,}1st = 0{,}1a \cdot 10^2 \cdot b \cdot 10^4 = ab \cdot 10^5$. Порядок числа ab равен 0 или 1, значит, порядок числа $ab \cdot 10^5$ равен 5 или 6.

36.19. Найти порядок произведения, частного и суммы чисел:

а) $3{,}252 \cdot 10^9$ и $2{,}165 \cdot 10^9$;
б) $4{,}435 \cdot 10^{-7}$ и $7{,}098 \cdot 10^{-7}$;
в) $8{,}389 \cdot 10^5$ и $9{,}762 \cdot 10^4$;
г) $7{,}987 \cdot 10^{-6}$ и $3{,}157 \cdot 10^{-5}$.

Решение.

а) $x = 3{,}252 \cdot 10^9$, $y = 2{,}165 \cdot 10^9$, $x_0 = 3{,}252$, $y_0 = 2{,}165$.

Тогда $1 < x_0y_0 < 10$, $xy = x_0y_0 \cdot 10^{18}$. Порядок этого числа равен 18.

Далее $1 < \dfrac{x_0}{y_0} < 10$, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x_0}{y_0} \cdot 10^0$. Порядок этого числа равен 0.

Наконец, $1 < x_0 + y_0 < 10$, $x + y = (x_0 + y_0) \cdot 10^9$. Порядок этого числа равен 9.

б) $x = 4{,}435 \cdot 10^{-7}$, $y = 7{,}098 \cdot 10^{-7}$, $x_0 = 4{,}435$, $y_0 = 7{,}098$.

Тогда $10 < x_0y_0 < 100$, $xy = x_0y_0 \cdot 10^{-14}$. Порядок этого числа равен -13.

Далее $0 < \dfrac{x_0}{y_0} < 1$, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x_0}{y_0} \cdot 10^0$. Порядок этого числа равен -1.

Наконец, $10 < x_0 + y_0 < 100$, $x + y = (x_0 + y_0) \cdot 10^{-7}$. Порядок этого числа равен -6.

в) $x = 8{,}389 \cdot 10^5$, $y = 9{,}762 \cdot 10^4$, $x_0 = 8{,}389$, $y_0 = 9{,}762$.

Тогда $10 < x_0 y_0 < 100$, $xy = x_0 y_0 \cdot 10^9$. Порядок этого числа равен 10.

Далее $0 < \frac{x_0}{y_0} < 1$, $\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0} \cdot 10^1$. Порядок этого числа равен 0.

Наконец, $x + y = 8{,}389 \cdot 10^5 + 9{,}762 \cdot 10^4 = (8{,}389 \cdot 10 + 9{,}762) \cdot 10^4$.

Порядок этого числа равен 5.

г) $x = 7{,}987 \cdot 10^{-6}$, $y = 3{,}157 \cdot 10^{-5}$, $x_0 = 7{,}987$, $y_0 = 3{,}157$.

Тогда $10 < x_0 y_0 < 100$, $xy = x_0 y_0 \cdot 10^{-11}$. Порядок этого числа равен -10.

Далее $1 < \frac{x_0}{y_0} < 10$, $\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0} \cdot 10^{-1}$. Порядок этого числа равен -1.

Наконец,

$x + y = 7{,}987 \cdot 10^{-6} + 3{,}157 \cdot 10^{-5} = (7{,}987 + 3{,}157 \cdot 10) \cdot 10^{-6}$. Порядок этого числа равен -5.

Оглавление

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич

АЛГЕБРА

8 класс

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *В. Ю. Фотиева*
Корректор *И. Н. Баханова*
Компьютерная графика и верстка: *А. А. Рязанцев*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.
Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,0. Тираж 5000 экз. Заказ № 582.

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru
www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный).
E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ООО «Финтрекс».
115477, Москва, ул. Кантемировская, 60.