B1
B2
B3
B4
B5
B6
B7
B8
B9
B10
B11
B12

С. А. Шестаков

ЕГЭ 2010
Математика
Задача B11

Рабочая тетрадь

учени________________________

__________класса__________

школы________________________

____

____

Под редакцией
А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Разработано МИОО

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

С. А. Шестаков

ЕГЭ 2010. Математика
Задача B11
Рабочая тетрадь

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Москва
Издательство МЦНМО
2010

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А.

Ш51 ЕГЭ 2010. Математика. Задача B11. Рабочая тетрадь / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2010. — 48 с.

ISBN 978-5-94057-570-2

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2010. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы для успешной сдачи Единого государственного экзамена по математике в 2010 году. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2010.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по основным темам алгебры и начал анализа. Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

ББК 22.1я72

ISBN 978-5-94057-570-2

От редакторов серии

Прежде чем вы начнете работать с нашими тетрадями, мы хотим дать вам некоторые пояснения и советы.

Экзамен по математике в 2010 году состоит из двух частей: в первой части — 12 простых задач, в которых требуется краткий ответ (B1—B12); во второй части — 6 сложных задач, требующих развернутого решения (C1—C6).

Наши рабочие тетради организованы в соответствии с заданиями первой части и позволяют вам подготовиться к выполнению всех заданий этой части, выявить и устранить пробелы в своих знаниях.

Тем из вас, для кого главное — это набрать минимальный аттестационный балл, мы рекомендуем ориентироваться на устойчивое, безошибочное решение 8 заданий из этой первой части. (Хотя в реальности минимальное число заданий, которое нужно решить верно, может составить 5, но ведь вам нужно застраховаться от случайной ошибки!) Эти 8 (или больше) заданий нужно выбрать исходя из того, что вы хорошо понимаете их условия, вам знаком материал и в школе вы хорошо справлялись с аналогичными заданиями (не обязательно в курсе математики 11 класса, а на протяжении всего обучения). При этом следует в первую очередь уделять внимание тем заданиям, которые у вас уже получаются, добиваясь максимально надежного их выполнения, не ограничивая себя временем.

Те из вас, кто ориентируется на поступление в вуз, конечно, понимают, что им желательно с высокой надежностью решать все задачи части B — ведь на решение такой задачи и вписывание ответа в лист на экзамене уйдет времени меньше, чем на задачу части C, жалко будет, если вы ошибетесь и потеряете нужный балл. Вам следует добиваться уверенного выполнения всех заданий первой части, большее внимание уделяя тем задачам, которые вызывают наибольшие затруднения. Устранение пробелов в ваших знаниях поможет вам и в работе с заданиями части C. Определив время, за которое вы можете уверенно без ошибок выполнить все задания первой части, следует планировать оставшееся время на экзамене на задания второй части.

Работу с тетрадью следует начать с выполнения диагностической работы.

Затем рекомендуется прочитать решения задач, сравнить свои решения с приведенными в книге. По тем задачам, которые вызвали затруднения, следует после повторения материала по учебнику или с учителем выполнить тематические тренинги.

Для завершающего контроля готовности к выполнению заданий соответствующей позиции ЕГЭ служат диагностические работы, приведенные в конце тетради.

Работа с серией рабочих тетрадей «ЕГЭ 2010. Математика» позволит выявить и в кратчайшие сроки ликвидировать пробелы в знаниях, но не может заменить систематического повторения (изучения) курса математики!

Желаем успеха!

Введение

Это пособие предназначено для подготовки к решению задач по теме «Исследование функций» и, в частности, задачи B11 Единого государственного экзамена по математике.

Можно выделить следующие основные группы задач по этой теме:

— исследование функции на экстремумы;

— исследование функции на возрастание/убывание;

— исследование функции на наибольшие и наименьшие значения (в том числе на отрезке);

— исследование функции с помощью графика ее производной (чтение графика производной).

Разница между первыми тремя и последней группами задач заключается лишь в способе задания функции. В более традиционных для школьных учебников задачах (первые три группы задач) функция задана аналитически, для решения задачи нужно найти производную, ее нули и промежутки знакопостоянства. Именно эти задачи и будут рассматриваться в пособии. В менее традиционных задачах, ставших очень популярными в последние годы (в том числе и благодаря ЕГЭ по математике), выводы о промежутках возрастания и убывания (т. е. промежутках монотонности), экстремумах функции, ее наименьших или наибольших значениях нужно сделать, исследуя заданный график производной этой функции.

Для успешного решения задач по теме необходимо уверенное владение навыками вычисления производных и решения неравенств. Исследование дифференцируемой функции на возрастание (убывание) сводится к определению промежутков знакопостоянства ее производной. Напомним соответствующие утверждения.

Достаточный признак возрастания функции. *Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале.*

Достаточный признак убывания функции. *Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале.*

Решение задач на нахождение точек максимума и минимума (точек экстремума) функции основывается на следующих утверждениях.

Признак максимума. *Если функция f непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$, $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то x_0 — точка максимума функции f (упрощенная формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума).*

Признак минимума. *Если функция f непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$, $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то x_0 — точка минимума функции f (упрощенная формулировка: если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка максимума).*

Обратим внимание на то, что условие непрерывности в точке x_0 является существенным. Если это условие не выполнено, точка x_0 может не являться точкой максимума (минимума), даже если функция f определена в ней и производная меняет знак при переходе через x_0. В самом деле, рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\neq 0,\\ 1 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Хотя эта функция определена в точке $x=0$ и в этой точке производная $f'(x)=2x$ меняет знак с минуса на плюс, эта точка не является точкой минимума.

Обратим внимание на следующий факт: точками максимума и минимума являются лишь точки области определения функции, и «ординат» эти точки иметь, разумеется, не могут. Тем не менее, очень часто называют, например, точку минимума функции $y=x^2+3$, не «точка 0», а «точка $(0;4)$», подразумевая точку графика функции. Такое утверждение является ошибочным.

Значение функции в точке минимума называется *минимумом* функции, а значение в точке максимума — *максимумом* функции.

Обратим внимание на то, что если функция возрастает (убывает) на каждом из двух промежутков, то на их объединении она далеко не всегда является возрастающей (убывающей). Например, о функции $y=\operatorname{tg}x$ очень часто приводятся следующие ошибочные утверждения: «функция $y=\operatorname{tg}x$ возрастает на всей области определения», «функция $y=\operatorname{tg}x$ возрастает на объединении промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$». Если бы эти утверждения были верны, то из $2>1$ следовало бы, что $\operatorname{tg}2>\operatorname{tg}1$, а это не так. Аналогично обстоит дело с функцией $y=\frac{1}{x}$: вывод о том, что она убывает на множестве $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ является математической ошибкой. В самом деле, из того, что $2>-3$, отнюдь не следует, что $\frac{1}{2}<\frac{1}{-3}$, и, следовательно, функция $y=\frac{1}{x}$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Перечислять промежутки возрастания лучше, используя точку, точку с запятой или союз «и», а не знак объединения множеств. Впрочем, это совет скорее на будущее, на случай, если задача на исследование функций когда-нибудь попадет во вторую часть ЕГЭ по математике и будет требовать полного решения.

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функций, непрерывной на отрезке, нужно вычислить ее значения в точках экстремума, принадлежащих отрезку, и значения на концах отрезка. Наибольшее (наименьшее) из вычисленных значений и будет наибольшим (соответственно — наименьшим) значением функции на отрезке. Обратим внимание на то, что для функции, непрерывной на интервале, аналогичное утверждение справедливо далеко не всегда. В качестве примера рассмотрим функцию $y=\operatorname{tg}x$ на интервале $(0;1)$. На этом интервале функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений. Действительно, если предположить, что в точке x_0 функция достигает, например, наибольшего значения, то это наибольшее значение равно

$y(x_0)=y_0$. Но тогда очевидно, что в любой точке $x_1 \in (x_0; 1)$ значение функции окажется больше, чем y_0, поскольку функция $y=\operatorname{tg} x$ является возрастающей.

Наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ обычно обозначаются символами $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ соответственно.

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции следует, что если наименьшее и наибольшее значения функции на данном отрезке равны числам m и M соответственно, то множеством значений функции на данном отрезке является отрезок $[m;M]$. Поэтому к решению задачи на отыскание множества значений функции, непрерывной на отрезке, также применим алгоритм вычисления наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.

Рассмотрим еще одну типичную ситуацию. При исследовании на монотонность непрерывной и дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции $y=3x^4-4x^3$ в ответе нужно указать только два промежутка монотонности: $(-\infty;1]$, на котором функция убывает, и $[1;+\infty)$ — промежуток возрастания. Точка 0, хотя и является критической, не будет концом промежутка монотонности, так как производная в этой точке не меняет знак. Напротив, при исследовании функции

$$y=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$$

в ответе должны быть указаны три промежутка монотонности: $(-\infty;0)$ и $[1;+\infty)$ — промежутки возрастания, $(0;1]$ — промежуток убывания.

Значение в точке минимума функции, принадлежащей отрезку, вовсе не обязательно является наименьшим значением функции на этом отрезке. Например, для функции

$$y=x^3-3x$$

наименьшим значением на отрезке $[-5;2]$ является вовсе не $y(-1)=2$ (значение в точке минимума), а $y(-5)=-110$. Разумеется, аналогичное замечание справедливо и для точек максимума.

Для решения задачи B11 может оказаться очень полезным следующее свойство непрерывных функций: «*Если функция $y=f(x)$ имеет на промежутке I единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой минимума, то в ней достигается наименьшее значение функции на данном промежутке*». Аналогичное утверждение справедливо для точки максимума и наибольшего значения функции. Например, если функция $y=f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, имеет на промежутке $(a;b)$ единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой максимума функции, то наибольшее значение функции на отрезке $[a;b]$ равно $f(x_0)$.

Иногда при решении задач на исследование функций оказывается, что на данном промежутке точек экстремума нет. Такой ситуации не надо пугаться: она означает, что на этом промежутке производная принимает значения одного знака, т. е. функция является монотонной на нем. Остается заметить, что если функция возрастает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в правом конце отрезка, а наименьшее — в левом; если функция убывает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в левом конце отрезка, а наименьшее — в правом.

Особое место в ряду задач на вычисление наибольших и наименьших значений занимают «текстовые» задачи (как правило, с геометрическим содержанием). Обычно в таких задачах требуется найти наибольшее или наименьшее возможное значение некоторой величины. При этом искомая величина рассматривается как функция некоторой другой величины. Так, например, если известен периметр p прямоугольника, то его площадь можно рассматривать как функцию

$$S(x) = x \cdot \frac{p-2x}{2},$$

где x — одна из сторон прямоугольника. Исследовав эту функцию, можно установить, какой из всех возможных прямоугольников данного периметра имеет наибольшую площадь. Для данной задачи это можно сделать и без применения производной, поскольку функция площади является квадратичной функцией с отрицательным коэффициентом при второй степени аргумента. Поэтому наибольшее значение достигается в вершине параболы, являющейся графиком функции, то есть в точке с абсциссой $\frac{p}{4}$. Следовательно, одна из сторон прямоугольника равна четверти периметра. Но тогда и любая другая сторона будет равна $\frac{p}{4}$. Таким образом, из всех прямоугольников данного периметра p наибольшую площадь $\frac{p^2}{16}$ имеет квадрат.

Заметим еще и следующее: алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке (как, впрочем, и любой другой алгоритм) не является единственным способом решения предложенной задачи. Можно, например, исследовать функцию на монотонность на данном отрезке и исходя из этого исследования найти наибольшее и наименьшее значения. Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения линейной или квадратичной функции на отрезке, вовсе не обязательно применять производную, а достаточно ограничиться известными свойствами линейной и квадратичной функций. Например, для функции $y = -7x + 3$ наибольшим и наименьшим значениями на отрезке $[-1; 2]$ будут, соответственно, числа $y(-1) = 10$ и $y(2) = -11$, так как функция убывает на данном отрезке.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2\sin 3x + 1$$

на отрезке [1993; 2010], достаточно заметить, что длина данного отрезка больше периода функции, и, следовательно, наибольшее и наименьшее значения на функции на данном отрезке равны соответственно 3 и –1 — наибольшему и наименьшему значениям функции на всей области определения. Решение задачи с применением алгоритма в данном случае окажется существенно более долгим и длинным.

При вычислении наибольшего и наименьшего значений функции

$$y = x^2 - 2x - 5$$

на отрезке $[0; 7]$ можно поступить следующим образом. Поскольку абсцисса $x_0 = 1$ вершины параболы, являющейся графиком квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 5$, принадлежит отрезку $[0; 7]$, то наименьшего значения эта функция достигает в точке $x_0 = 1$ (это значение: $y(1) = -6$), а наибольшего — в том из концов отрезка $[0; 7]$, который наиболее удален от x_0, то есть при $x = 7$ (это значение легко вычислить: $y(7) = 30$).

В некоторых более сложных случаях наибольшее и наименьшее значение функции также можно вычислять без использования производной. Найдем, например, наибольшее и наименьшее значения функции $y = \cos 2x + \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. Воспользовавшись формулой двойного аргумента, получим, что $y = -2\sin^2 x + \sin x + 1$. Пусть $\sin x = t$. Поскольку по условию $x \in [0; \pi]$, то $t \in [0; 1]$. Таким образом, задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции

$$y = -2t^2 + t + 1$$

на отрезке $[0; 1]$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы $t_0 = \frac{1}{4} \in [0; 1]$. Поэтому наибольшее значение достигается в точке t_0, а наименьшее — в том из концов отрезка $[0; 1]$, который наиболее удален от точки t_0, то есть

$$\max_{[0;1]} y(t) = y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}, \quad \min_{[0;1]} y(t) = y(1) = 0.$$

Соответствующие значения x находятся из уравнений $\sin x = \frac{1}{4}$ и $\sin x = 1$ при условии $x \in [0; \pi]$.

Аналогично, нахождение множества значений функции

$$y = 5\cos^2 x - 3\cos x + 1$$

сводится к нахождению множества значений функции

$$f(t) = 5t^2 - 3t + 1$$

на отрезке $[-1; 1]$. Наибольшее и наименьшее значения $f(t)$ достигаются в точках $t = -1$ и $t = 0{,}3$ соответственно и равны $f(-1) = 9$ и $f(0{,}3) = 0{,}55$. Таким образом, множеством значений функции

$$y = 5\cos^2 x - 3\cos x + 1$$

является отрезок $[0{,}55; 9]$.

Для того чтобы подготовку к ЕГЭ сделать максимально эффективной, в пособие включены задания на исследование функций, соответствующие всем шести функционально-числовым линиям школьного курса:

— целые рациональные функции (многочлены),

— дробно-рациональные функции,

— иррациональные функции,

— тригонометрические функции,

— показательная функция,

— логарифмическая функция.

Здесь под иррациональными функциями понимаются функции, заданные формулой, в которой переменная находится под знаком корня n-й степени или имеет дробную степень. Такое построение пособия, с одной стороны, позволит выявить существующие пробелы и проблемные зоны в подготовке с целью их устранения и выработки устойчивых навыков решения несложных задач на вычисление и преобразование, а с другой — использовать комплексный подход при организации и проведении обобщающего повторения.

Пособие включает 5 диагностических и 12 тренировочных работ, а также разбор задач первой диагностической работы с необходимыми методическими рекомендациями. Каждая диагностическая работа содержит 12 заданий (по два на каждую из шести функционально-числовых линий школьного курса в соответствии с указанным выше порядком). При этом первое из двух заданий каждой пары является заданием на вычисление точек экстремума, второе — заданием на вычисление наибольшего или наименьшего значения функции на данном отрезке. Каждая тренировочная работа соответствует одному из заданий диагностической работы и содержит 10 задач для выработки или закрепления навыков решения по каждому типу заданий.

В начале работы с пособием целесообразно выполнить первую диагностическую работу, определить, какие задачи вызывают затруднения, и обратиться при необходимости к разбору задач. После этого нужно потренироваться в решении задач каждого типа, выполнив тренировочные работы. Для завершения подготовки следует обратиться к диагностическим работам 1—4 и постараться решить их без ошибок. Желательно, чтобы время решения любой из диагностических и тренировочных работ не превышало 30—40 минут.

Подчеркнем, что в пособии рассматриваются задания, в значительной части отвечающие по уровню сложности заданию B11 ЕГЭ по математике. Умение решать такие задачи является базовым: без него невозможно продвинуться в решении более сложных задач. Тем не менее часть включенных в пособие задач — несколько сложнее задачи B11 демоверсии: их решение позволит нарастить определенную «математическую мускулатуру» и чувствовать себя на экзамене застрахованным от неприятных неожиданностей.

При подготовке к решению задач части I Единого государственного экзамена нужно помнить следующее. Проверка ответов осуществляется компьютером после сканирования бланка ответов и сопоставления результатов сканирования с правильными ответами. Поэтому цифры в бланке ответов следует писать разборчиво и строго в соответствии с инструкцией по заполнению бланка (с тем, чтобы, например, 1 и 7 или 8 и B распознавались корректно). К сожалению, ошибки сканирования полностью исключить нельзя, поэтому если есть уверенность в задаче, за которую получен минус, нужно идти на апелляцию. Ответом к задаче может быть только целое число или конечная десятичная дробь. Ответ, зафиксированный в иной форме, будет распознан как неправильный. В этом смысле задание B11 не является исключением: если результатом вычислений явилась обыкновенная дробь, например, $\frac{3}{4}$, перед записью ответа в бланк ее нужно обратить в десятичную, т. е. в ответе написать 0,75. Важно помнить, что каждый символ (в том числе запятая и знак «минус») записывается в отдельную клеточку, как это показано на полях пособия.

Диагностическая работа

Ответы:

1. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 - 48x + 17.$$

2. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 27x$$
на отрезке $[0; 4]$.

3. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{25}{x} + x + 25.$$

4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x + \frac{9}{x}$$
на отрезке $[-4; -1]$.

5. Найдите точку максимума функции
$$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

6. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$
на отрезке $[1; 9]$.

7. Найдите точку минимума функции
$$y = (0{,}5 - x)\cos x + \sin x,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi + 4$$
на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

9. Найдите точку максимума функции
$$y = (x^2 - 17x - 17)e^{7-x}.$$

1 | | | | | | | |

2 | | | | | | | |

3 | | | | | | | |

4 | | | | | | | |

5 | | | | | | | |

6 | | | | | | | |

7 | | | | | | | |

8 | | | | | | | |

9 | | | | | | | |

Образец написания: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

10

11

12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-13)e^{x-12}$$

на отрезке $[11; 13]$.

11. Найдите точку минимума функции

$$y = x - 5\ln x.$$

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5 - 7x + 7\ln(x+3)$$

на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

Целые рациональные функции. Решения задач 1 и 2 диагностической работы

1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 48x + 17.$$

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = 3x^2 - 48.$$

Определим промежутки знакопостоянства производной, разложив полученное выражение на множители:

$$3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x+4)(x-4).$$

В точке $x = -4$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.

$y'(x)$	$+$	max	$-$	min	$+$	
$y(x)$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	4	$\nearrow$	x

Ответ: -4.

2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 27x$$

на отрезке $[0; 4]$.

Решение. Найдем производную функции

$$y = x^3 - 27x$$

и воспользуемся формулой квадрата разности:

$$y' = 3x^2 - 27, \quad y' = 3(x-3)(x+3).$$

Производная меняет знак в точках $x = -3$ и $x = 3$. Отрезку $[0; 4]$ принадлежит только точка $x = 3$, в которой производная меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, точка $x = 3$ является точкой минимума и единственной точкой экстремума на данном отрезке. Значит, своего наименьшего значения на данном отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54.$$

Ответ: -54.

Ответы:

T1.1

T1.2

T1.3

T1.4

T1.5

T1.6

T1.7

T1.8

T1.9

T1.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 1

T1.1. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

T1.2. Найдите точку максимума функции

$$y = 9 - 4x + 4x^2 - x^3.$$

T1.3. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 3{,}5x^2 + 2x - 3.$$

T1.4. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 + x^2 - 8x - 7.$$

T1.5. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 4x^2 - 3x - 12.$$

T1.6. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 + 8x^2 + 16x + 3.$$

T1.7. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 + x^2 - 16x + 5.$$

T1.8. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 + 4x^2 + 4x + 4.$$

T1.9. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 4x^2 - 3x + 8.$$

T1.10. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 + 5x^2 + 3x + 2.$$

Тренировочная работа 2

Т2.1. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 3x^2 - 2x^3 + 1$$
на отрезке $[-4; 0]$.

Т2.2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 4x^2 - 4x - x^3$$
на отрезке $[1; 3]$.

Т2.3. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 2x^2 + x + 5$$
на отрезке $[1; 4]$.

Т2.4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 + x^2 - 8x - 8$$
на отрезке $[-3; 0]$.

Т2.5. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 4x^2 - 3x - 11$$
на отрезке $[0; 6]$.

Т2.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 + 4x^2 - 3x - 7$$
на отрезке $[-4; 0]$.

Т2.7. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 + x^2 - 16x$$
на отрезке $[-1; 4]$.

Т2.8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 + 4x^2 + 4x$$
на отрезке $[-3; -1]$.

Т2.9. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 4x^2 - 3x$$
на отрезке $[1; 5]$.

Т2.10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 + 5x^2 + 3x$$
на отрезке $[-4; -1]$.

Ответы:

Т2.1

Т2.2

Т2.3

Т2.4

Т2.5

Т2.6

Т2.7

Т2.8

Т2.9

Т2.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Дробно-рациональные функции. Решения задач 3 и 4 диагностической работы

3. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{25}{x} + x + 25.$$

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = -\frac{25}{x^2} + 1.$$

Определим промежутки знакопостоянства производной, приведя полученное выражение к общему знаменателю и разложив числитель на множители:

$$\frac{x^2 - 25}{x^2} = \frac{(x-5)(x+5)}{x^2}.$$

В точке $x = 5$ производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, эта точка и является единственной точкой минимума.

Ответ: 5.

4. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{9}{x}$ на отрезке $[-4; -1]$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = 1 - \frac{9}{x^2}.$$

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и разложим числитель на множители:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}.$$

Отрезку $[-4; -1]$ принадлежит только точка $x = -3$, в которой производная меняет знак с плюса на минус. Таким образом, точка $x = -3$ является точкой максимума и единственной точкой экстремума на данном отрезке. Значит, своего наибольшего значения на данном отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наибольшее значение:

$$y(-3) = -3 + \frac{9}{-3} = -6.$$

Ответ: -6.

Тренировочная работа 3

Т3.1. Найдите точку минимума функции

$$y = 16 - \frac{16}{x} - x.$$

Т3.2. Найдите точку максимума функции

$$y = -\frac{x^2+36}{x}.$$

Т3.3. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{x^2+64}{x}.$$

Т3.4. Найдите точку максимума функции

$$y = 7 - 0{,}5x - \frac{2}{x^2}.$$

Т3.5. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{4}{x^2} + x + 4.$$

Т3.6. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{27}{x} - 0{,}5x^2 + 6.$$

Т3.7. Найдите точку минимума функции

$$y = 0{,}5x^2 + \frac{1}{x} + 1{,}5.$$

Т3.8. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{16}{x} - x^2 + 9.$$

Т3.9. Найдите точку минимума функции

$$y = x^2 - \frac{54}{x} + 45.$$

Т3.10. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{128}{x} - x^2 + 100.$$

Ответы:

Т3.1

Т3.2

Т3.3

Т3.4

Т3.5

Т3.6

Т3.7

Т3.8

Т3.9

Т3.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

T4.1

T4.2

T4.3

T4.4

T4.5

T4.6

T4.7

T4.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 4

T4.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2+16}{x}$$

на отрезке [2; 8].

T4.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2+7x+49}{x}$$

на отрезке [−14; −1].

T4.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2-6x+36}{x}$$

на отрезке [3; 9].

T4.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2-8x+64}{x}$$

на отрезке [−16; −4].

T4.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2+10x+100}{x}$$

на отрезке [1; 20].

T4.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^3+x^2+9}{x} - x^2$$

на отрезке [−9; −1].

T4.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 + \frac{25+x^2-x^3}{x}$$

на отрезке [1; 10].

T4.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{16-x^3}{x}$$

на отрезке [−4; −1].

T4.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^3 - 54}{x}$$

на отрезке $[-6; -1]$.

T4.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{250 + 50x - x^3}{x}$$

на отрезке $[-10; -1]$.

Ответы:

T4.9

T4.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Иррациональные функции. Решения задач 5 и 6 диагностической работы

5. Найдите точку максимума функции

$$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = 6 - 3x^{\frac{1}{2}}, \quad y' = 3(2 - \sqrt{x}).$$

Производная обращается в нуль, если $\sqrt{x} = 2$, откуда $x = 4$. В точке $x = 4$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.

Ответ: 4.

6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$$

на отрезке $[1; 9]$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3, \quad y' = \frac{3}{2}(\sqrt{x} - 2).$$

Производная обращается в нуль, если $\sqrt{x} = 2$, откуда $x = 4$. В точке $x = 4$ производная меняет знак с минуса на плюс, эта точка является единственной точкой минимума на данном отрезке и наименьшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$$y(3) = 4^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 4 + 1 = -3.$$

Ответ: -3.

Тренировочная работа 5

T5.1. Найдите точку минимума функции

$$y=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-6x+1.$$

T5.2. Найдите точку максимума функции

$$y=2+3x-x\sqrt{x}.$$

T5.3. Найдите точку минимума функции

$$y=x\sqrt{x}-1{,}5x+2.$$

T5.4. Найдите точку максимума функции

$$y=7+8x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}.$$

T5.5. Найдите точку минимума функции

$$y=(x-9)\sqrt{x}.$$

T5.6. Найдите точку максимума функции

$$y=(6-x)\sqrt{x}.$$

T5.7. Найдите точку минимума функции

$$y=(x-12)\sqrt{x}.$$

T5.8. Найдите точку максимума функции

$$y=(15-x)\sqrt{x}.$$

T5.9. Найдите точку минимума функции

$$y=x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2.$$

T5.10. Найдите точку максимума функции

$$y=11+6\sqrt{x}-2x\sqrt{x}.$$

Ответы:

T5.1

T5.2

T5.3

T5.4

T5.5

T5.6

T5.7

T5.8

T5.9

T5.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Т6.1

Т6.2

Т6.3

Т6.4

Т6.5

Т6.6

Т6.7

Т6.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 6

Т6.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-12)\sqrt{x}$$

на отрезке $[1; 9]$.

Т6.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7 - 6\sqrt{x} - 5x^3$$

на отрезке $[1; 4]$.

Т6.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 + 5\sqrt{x} + 7$$

на отрезке $[4; 16]$.

Т6.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (7-x)\sqrt{x+5}$$

на отрезке $[-4; 4]$.

Т6.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-11)\sqrt{x+1}$$

на отрезке $[0; 8]$.

Т6.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (10-x)\sqrt{x+2}$$

на отрезке $[-1; 7]$.

Т6.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x-15)\sqrt{x+12} + 6$$

на отрезке $[-8; 4]$.

Т6.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (8-x)\sqrt{x+4} + 1$$

на отрезке $[-3; 5]$.

Ответы:

Т6.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2(x-20)\sqrt{x+7}+5$$

на отрезке $[-6; 2]$.

Т6.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5-(x-14)\sqrt{x+13}$$

на отрезке $[-9; 3]$.

Т6.9

Т6.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тригонометрические функции. Решения задач 7 и 8 диагностической работы

7. Найдите точку минимума функции
$$y=(0{,}5-x)\cos x+\sin x,$$
принадлежащую промежутку $\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Сначала найдем производную данной функции, применив правило для вычисления производной произведения двух функций:
$$y'=(0{,}5-x)'\cos x+(0{,}5-x)\cos' x+\sin' x,$$
откуда
$$y'=-\cos x-(0{,}5-x)\sin x+\cos x,$$
и следовательно, $y'=-(0{,}5-x)\sin x$, или $y'=(x-0{,}5)\sin x$. На промежутке $\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$ производная обращается в нуль только при $x=0{,}5$, поскольку $\sin x>0$ при $x\in\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$. В точке $x=0{,}5$ производная меняет знак с минуса на плюс, эта точка является единственной точкой минимума на данном промежутке.

Ответ: 0,5.

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y=4\sqrt{2}\cos x+4x-\pi+4$$
на отрезке $\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Найдем производную данной функции:
$$y'=-4\sqrt{2}\sin x+4.$$
Производная обращается в нуль, если $4\sqrt{2}\sin x=4$, откуда $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Отрезку $\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит единственный корень $x=\frac{\pi}{4}$ полученного уравнения. В точке $x=\frac{\pi}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус, эта точка является единственной точкой максимума на данном отрезке и наибольшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наибольшее значение:
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+4\cdot\frac{\pi}{4}-\pi+4,$$
откуда $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=8$.

Ответ: 8.

Тренировочная работа 7

Ответы:

Т7.1. Найдите точку максимума функции

$$y = x\sin x + \cos x - 3\sin x + 1,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Т7.2. Найдите точку минимума функции

$$y = (x - 1{,}5)\sin x + \cos x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Т7.3. Найдите точку максимума функции

$$y = (6 - 5x)\sin x - 5\cos x + 6,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Т7.4. Найдите точку минимума функции

$$y = 2\cos x - (1 - 2x)\sin x + 1,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Т7.5. Найдите точку максимума функции

$$y = 2\cos x - (5 - 2x)\sin x + 4,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Т7.6. Найдите точку минимума функции

$$y = x\sin x + \cos x - \frac{3}{4}\sin x,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Т7.7. Найдите точку максимума функции

$$y = \sin x - 4\cos x - 4x\sin x + 5,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Т7.1

Т7.2

Т7.3

Т7.4

Т7.5

Т7.6

Т7.7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Т7.8

Т7.9

Т7.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Т7.8. Найдите точку минимума функции

$$y = 3(x - 1{,}25)\sin x + 3\cos x + 2,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Т7.9. Найдите точку максимума функции

$$y = (2 - 5x)\sin x - 5\cos x + 3,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Т7.10. Найдите точку минимума функции

$$y = 4\sin x + 2(5 - 2x)\cos x - 7,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Ответы:

Тренировочная работа 8

T8.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 9 + \sqrt{3}\pi - 3\sqrt{3}x - 6\cos x$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

T8.1

T8.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 6\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$$

на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

T8.2

T8.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5\cos x - \frac{24}{\pi}x + 9$$

на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

T8.3

T8.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 9\operatorname{tg} x - 8x + 7$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

T8.4

T8.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x - 5\operatorname{tg} x - 5\pi + 4$$

на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

T8.5

T8.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5\operatorname{tg} x - 4x + \pi + 9$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

T8.6

T8.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - 2\cos x - \sqrt{3}x - 5$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

T8.7

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Т8.8

Т8.9

Т8.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Т8.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2\sin x - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 7$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Т8.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 7\sin x + 8\cos x - 17x - 18$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Т8.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4\sin x - 5\cos x + 11x - 13$$

на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Показательная функция. Решения задач 9 и 10 диагностической работы

9. Найдите точку максимума функции

$$y=(x^2-17x-17)e^{7-x}.$$

Решение. Сначала найдем производную данной функции, применив правило для вычисления производной произведения двух функций:

$$y'=(x^2-17x-17)'e^{7-x}+(x^2-17x-17)\left(e^{7-x}\right)',$$

откуда

$$y'=(2x-17)e^{7-x}+(x^2-17x-17)\left(-e^{7-x}\right),$$

и, следовательно,

$$y'=-(x^2-19x)e^{7-x}, \quad \text{или} \quad y'=-x(x-19)e^{7-x}.$$

Производная обращается в нуль при $x=0$ и $x=19$, причем меняет знак с плюса на минус в точке $x=19$. Эта точка и является единственной точкой максимума.

Ответ: 19.

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y=(x-13)e^{x-12}$$

на отрезке $[11; 13]$.

Решение. Сначала найдем производную данной функции, применив правило для вычисления производной произведения двух функций:

$$y'=(x-13)'e^{x-12}+(x-13)(e^{x-12})',$$

откуда

$$y'=e^{x-12}+(x-13)e^{x-12},$$

и, следовательно, $y'=(x-12)e^{x-12}$. В точке $x=12$ производная меняет знак с минуса на плюс, эта точка является единственной точкой минимума на данном отрезке и наименьшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$$y(12)=(12-13)e^{12-12}=-1.$$

Ответ: -1.

Ответы:

T9.1

T9.2

T9.3

T9.4

T9.5

T9.6

T9.7

T9.8

T9.9

T9.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 9

T9.1. Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 5x + 5)e^{x-5}.$$

T9.2. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 8x + 8)e^{x-8}.$$

T9.3. Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 15x + 15)e^{x-15}.$$

T9.4. Найдите точку максимума функции

$$y = (x + 3)^2 e^{3-x}.$$

T9.5. Найдите точку минимума функции

$$y = -(x - 4)^2 e^{x-4}.$$

T9.6. Найдите точку максимума функции

$$y = (x - 6)^2 e^{x-6}.$$

T9.7. Найдите точку минимума функции

$$y = (4 - x)e^{5-x}.$$

T9.8. Найдите точку максимума функции

$$y = (x - 6)e^{7-x}.$$

T9.9. Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 3)e^{x-3}.$$

T9.10. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 + 2x - 5)e^{x+4}.$$

Ответы:

Тренировочная работа 10

T10.1. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 8 + (x-7)e^{x-6}$$
на отрезке [3; 9].

T10.2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-11)e^{12-x} + 13$$
на отрезке [5; 15].

T10.3. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 5 - (x-3)e^{4-x}$$
на отрезке [0; 7].

T10.4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-4)^2 e^{x-2}$$
на отрезке [1; 3].

T10.5. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2 - (x-3)^2 e^{5-x}$$
на отрезке [4; 6].

T10.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 6 + (x-7)^2 e^{x-5}$$
на отрезке [4; 6].

T10.7. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 4 - (x-4)^2 e^{x-2}$$
на отрезке [1; 3].

T10.8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (x-6)^2 e^{8-x}$$
на отрезке [7; 9].

T10.9. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x^2 - 5x + 5)e^{x-3}$$
на отрезке [1; 5].

T10.10. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (3 - x^2)e^{x-1}$$
на отрезке [0; 2].

T10.1

T10.2

T10.3

T10.4

T10.5

T10.6

T10.7

T10.8

T10.9

T10.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Логарифмическая функция. Решения задач 11 и 12 диагностической работы

11. Найдите точку минимума функции

$$y = x - 5\ln x.$$

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = 1 - \frac{5}{x},$$

откуда

$$y' = \frac{x-5}{x}.$$

Производная меняет знак в единственной точке $x = 5$, причем знак производной в этой точке меняется с плюса на минус. Следовательно, эта точка и является единственной точкой минимума данной функции.

Ответ: 5.

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5 - 7x + 7\ln(x+3)$$

на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = -7 + \frac{7}{x+3},$$

откуда

$$y' = -7\frac{x+2}{x+3}.$$

Производная меняет знак в единственной точке $x = -2$, причем знак производной в этой точке меняется с плюса на минус. Эта точка является единственной точкой максимума на данном отрезке и наибольшего значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наибольшее значение:

$$y(-2) = 5 - 7\cdot(-2) + 7\ln(-2+3) = 19.$$

Ответ: 19.

Ответы:

Тренировочная работа 11

Т11.1. Найдите точку максимума функции

$$y = 2\ln x - 5x + 7.$$

Т11.2. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x-8) - x + 5.$$

Т11.3. Найдите точку минимума функции

$$y = x - \ln(x-7) + 7.$$

Т11.4. Найдите точку максимума функции

$$y = 4\ln(x-3) - 2x + 3.$$

Т11.5. Найдите точку минимума функции

$$y = 2x - 5\ln(x-7).$$

Т11.6. Найдите точку максимума функции

$$y = 18\ln x - x^2.$$

Т11.7. Найдите точку минимума функции

$$y = 2x - 7\ln(x-8) + 5.$$

Т11.8. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x+5) - 5x + 5.$$

Т11.9. Найдите точку минимума функции

$$y = (x-3)^2 - 8\ln x.$$

Т11.10. Найдите точку максимума функции

$$y = 6\ln x - (x-2)^2.$$

Т11.1

Т11.2

Т11.3

Т11.4

Т11.5

Т11.6

Т11.7

Т11.8

Т11.9

Т11.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

T12.1

T12.2

T12.3

T12.4

T12.5

T12.6

T12.7

T12.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Тренировочная работа 12

T12.1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5x - \ln(x+5)^5$$

на отрезке $[-4{,}5;\ 1]$.

T12.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3\ln(x+2) - 3x + 10$$

на отрезке $[-1{,}5;\ 0]$.

T12.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 - 4x + 2\ln x$$

на отрезке $[0{,}1;\ 8{,}1]$.

T12.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7 - 7x + \ln(7x)$$

на отрезке $\left[\frac{1}{13};\ \frac{1}{3}\right]$.

T12.5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 - 2\ln x + 1$$

на отрезке $[0{,}3;\ 3{,}3]$.

T12.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \ln(13x) - 13x + 13$$

на отрезке $\left[\frac{1}{15};\ \frac{1}{11}\right]$.

T12.7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 - 11x + 5\ln x + 7$$

на отрезке $\left[\frac{11}{12};\ \frac{13}{12}\right]$.

T12.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 7 - \ln x + 5x - 2x^2$$

на отрезке $\left[\frac{1}{6};\ \frac{7}{6}\right]$.

Т12.9. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3x^2 - 10x + 4\ln x$$

на отрезке [0,8; 1,2].

Т12.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3 - x^2 + 7x - 5\ln x$$

на отрезке $\left[\frac{1}{8}; \frac{9}{8}\right]$.

Ответы:

Т12.9

Т12.10

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

Д1.1

Д1.2

Д1.3

Д1.4

Д1.5

Д1.6

Д1.7

Д1.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 1

Д1.1. Найдите точку минимума функции
$$y = 7 + 12x - x^3.$$

Д1.2. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x^3 - 3x + 4$$
на отрезке $[-2; 0]$.

Д1.3. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{16}{x} + x + 3.$$

Д1.4. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x + \frac{36}{x}$$
на отрезке $[1; 9]$.

Д1.5. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1.$$

Д1.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 3x - 2x^{\frac{3}{2}}$$
на отрезке $[0; 4]$.

Д1.7. Найдите точку максимума функции
$$y = (2x - 3)\cos x - 2\sin x + 5,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Д1.8. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 6\sin x - 9x + 5$$
на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Д1.9. Найдите точку минимума функции

$$y = (x-7)e^{x+7}.$$

Д1.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (x-9)e^{10-x}$$

на отрезке $[-11; 11]$.

Д1.11. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln x - 2x.$$

Д1.12. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4x - 4\ln x + 5$$

на отрезке $[0{,}5; 5{,}5]$.

Ответы:

Д1.9

Д1.10

Д1.11

Д1.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Д2.1

Д2.2

Д2.3

Д2.4

Д2.5

Д2.6

Д2.7

Д2.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 2

Д2.1. Найдите точку максимума функции

$$y = 5 + 4x - \frac{x^3}{3}.$$

Д2.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^3 - 6x^2$$

на отрезке $[-3; 3]$.

Д2.3. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{49}{x} + x + 49.$$

Д2.4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x + \frac{4}{x} + 4$$

на отрезке $[-4; -1]$.

Д2.5. Найдите точку максимума функции

$$y = 5 + 18x - 4x^{\frac{3}{2}}.$$

Д2.6. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 6x - x\sqrt{x} + 1$$

на отрезке $[9; 25]$.

Д2.7. Найдите точку минимума функции

$$y = 5\sin x - 5(x-1)\cos x + 4,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Д2.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 12\cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Д2.9. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 17x + 17)e^{7-x}.$$

Д2.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4 + (x - 5)e^{6-x}$$

на отрезке [1; 8].

Д2.11. Найдите точку минимума функции

$$y = x - 7\ln x + 6.$$

Д2.12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5\ln x - 5x + 7$$

на отрезке [0,7; 1,7].

Ответы:

Д2.9

Д2.10

Д2.11

Д2.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы:

Д3.1

Д3.2

Д3.3

Д3.4

Д3.5

Д3.6

Д3.7

Д3.8

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Диагностическая работа 3

Д3.1. Найдите точку минимума функции

$$y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7.$$

Д3.2. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 9x^2 - x^3$$

на отрезке $[1; 10]$.

Д3.3. Найдите точку максимума функции

$$y = \frac{9}{x} + x + 9.$$

Д3.4. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x + \frac{64}{x} + 8$$

на отрезке $[4; 16]$.

Д3.5. Найдите точку максимума функции

$$y = 2 + 5x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$$

Д3.6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x\sqrt{x} - 12x + 11$$

на отрезке $[36; 81]$.

Д3.7. Найдите точку минимума функции

$$y = 2\cos x + \sin x - x\cos x,$$

принадлежащую промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Д3.8. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 11x - 5\cos x + 2$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Д3.9. Найдите точку максимума функции

$$y = (x+8)e^{8-x}.$$

Д3.10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = (x+4)e^{x+5}$$

на отрезке $[-9; 9]$.

Д3.11. Найдите точку минимума функции

$$y = 2x - 5\ln x + 3.$$

Д3.12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \ln(x+3)^3 - 3x$$

на отрезке $[-2{,}5; 2{,}5]$.

Ответы:

Д3.9

Д3.10

Д3.11

Д3.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – ,

Ответы:

Д4.1

Д4.2

Д4.3

Д4.4

Д4.5

Д4.6

Д4.7

Д4.8

Д4.9

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Диагностическая работа 4

Д4.1. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5.$$

Д4.2. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$
на отрезке $[1; 4]$.

Д4.3. Найдите точку максимума функции
$$y = \frac{x^2 + 225}{x}.$$

Д4.4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = \frac{x^2 + 25}{x}$$
на отрезке $[-10; -1]$.

Д4.5. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 5.$$

Д4.6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = (27 - x)\sqrt{x}$$
на отрезке $[1; 16]$.

Д4.7. Найдите точку максимума функции
$$y = 3 - 4\sin x - (5 - 4x)\cos x,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Д4.8. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 2\sin x + 7x - 11$$
на отрезке $[0; 3\pi]$.

Д4.9. Найдите точку минимума функции
$$y = (x + 5)e^{x-5}.$$

Д4.10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (8 - x)e^{x-7}$$

на отрезке [3; 10].

Д4.11. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x + 2) - x + 3.$$

Д4.12. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2x - 2\ln(x + 3) + 3$$

на отрезке [−2,5; 1].

Ответы:

Д4.10

Д4.11

Д4.12

Образец написания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - ,

Ответы

Диагностическая работа

1. −4. **2.** −54. **3.** 5. **4.** −6. **5.** 4. **6.** −3. **7.** 0,5. **8.** 8. **9.** 19. **10.** −1. **11.** 5. **12.** 19.

Тренировочная работа 1 (Т1)

1. 1. **2.** 2. **3.** 2. **4.** −2. **5.** 3. **6.** −4. **7.** 2. **8.** −2. **9.** 3. **10.** −3.

Тренировочная работа 2 (Т2)

1. 1. **2.** 0. **3.** 5. **4.** 4. **5.** −29. **6.** 11. **7.** −20. **8.** 0. **9.** −18. **10.** 9.

Тренировочная работа 3 (Т3)

1. −4. **2.** 6. **3.** 8. **4.** 2. **5.** 2. **6.** −3. **7.** 1. **8.** −2. **9.** −3. **10.** −4.

Тренировочная работа 4 (Т4)

1. 8. **2.** −7. **3.** 6. **4.** −24. **5.** 30. **6.** −6. **7.** 10. **8.** −12. **9.** 27. **10.** −25.

Тренировочная работа 5 (Т5)

1. 9. **2.** 4. **3.** 1. **4.** 16. **5.** 3. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 5. **9.** 1. **10.** 1.

Тренировочная работа 6 (Т6)

1. −16. **2.** −4. **3.** 81. **4.** 16. **5.** −16. **6.** 16. **7.** −48. **8.** 17. **9.** −103. **10.** 59.

Тренировочная работа 7 (Т7)

1. 3. **2.** 1,5. **3.** 1,2. **4.** 0,5. **5.** 2,5. **6.** 0,75. **7.** 0,25. **8.** 1,25. **9.** 0,4. **10.** 2,5.

Тренировочная работа 8 (Т8)

1. 6. **2.** 34. **3.** 14. **4.** 7. **5.** −1. **6.** 14. **7.** −6. **8.** 8. **9.** −10. **10.** −18.

Тренировочная работа 9 (Т9)

1. 3. **2.** 0. **3.** 13. **4.** −1. **5.** 2. **6.** 4. **7.** 5. **8.** 7. **9.** 1. **10.** −5.

Тренировочная работа 10 (Т10)

1. 7. **2.** 14. **3.** 4. **4.** 4. **5.** −2. **6.** 10. **7.** 0. **8.** 4. **9.** −1. **10.** 2.

Тренировочная работа 11 (Т11)

1. 0,4. **2.** 9. **3.** 8. **4.** 5. **5.** 9,5. **6.** 3. **7.** 11,5. **8.** −4,8. **9.** 4. **10.** 3.

Тренировочная работа 12 (Т2)

1. −20. **2.** 13. **3.** −3. **4.** 6. **5.** 2. **6.** 12. **7.** −1. **8.** 10. **9.** −7. **10.** 9.

Диагностические работы

Диагностическая работа 1 (Д1)

1. −2. **2.** 6. **3.** −4. **4.** 12. **5.** 4. **6.** 1. **7.** 1,5. **8.** 5. **9.** 6. **10.** 1. **11.** 0,5. **12.** 9.

Диагностическая работа 2 (Д2)

1. 2. **2.** 0. **3.** 7. **4.** 0. **5.** 9. **6.** 33. **7.** 1. **8.** 12. **9.** 17. **10.** 5. **11.** 7. **12.** 2.

Диагностическая работа 3 (Д3)

1. 3. **2.** 108. **3.** −3. **4.** 24. **5.** 25. **6.** −245. **7.** 2. **8.** −3. **9.** −7. **10.** −1. **11.** 2,5. **12.** 6.

Диагностическая работа 4 (Д4)

1. 1. **2.** −2. **3.** −15. **4.** −10. **5.** 36. **6.** 54. **7.** 1,25. **8.** −11. **9.** −6. **10.** 1. **11.** −1. **12.** −1.

Содержание

Шестаков Сергей Алексеевич

Математика. Задача B11. Рабочая тетрадь

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Подписано в печать 5.11.2009 г. Формат 70×90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 3. Тираж 20000 экз. Заказ № 19716.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано по CtP-технологии в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский проспект, 15.